Анализ сложности интегральных траекторий автономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Макаренко А. В.

СКГМИ (ГТУ), Владикавказ, Россия
e-mail: avm.science@mail.ru

Введём в рассмотрение динамическую систему заданную автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (подобный класс уравнений, в частности, широко применяется для описания нелинейных колебательных систем):

$$\ddot{x} = Q(x,\, \dot{x}). \tag{1}$$

Причём $x \in X \subset R^1$, функция $Q(x,\, \dot{x})$ – гладкая, непрерывная, определена в области $G \subset R^2$, и имеет в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого, а уравнение удовлетворяет теоремам о существовании и единственности решения.

В работе [1] были обозначены основные положения нового подхода, сообщающего качественную и, в определённом роде, количественную информацию о динамических характеристиках интегральных траекторий $x(t)$, $t \in T \subset R^1$ системы вида (1) в пространстве событий $\Omega = X \times T$. При этом носителем информации являются скалярные поля:

$$\varphi_0^T(x,\, \dot{x}) = \frac{Q(x,\, \dot{x})}{1 + \dot{x}^2}, \quad \beta_2^T(x,\, \dot{x}) = \dot{x}\, \varphi_0^T(x,\, \dot{x}). \tag{2}$$

Дополнительные исследования показали, что через величины (2) также возможно выразить *сложность интегральных траекторий* $x(t)$ в пространстве Ω:

$$c_{x\alpha}(x,\, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}^2 + Q^2(x,\, \dot{x})},\; c_{\alpha\varphi}(x,\, \dot{x}) = \sqrt{Q^2(x,\, \dot{x}) + \left[\dot{\varphi}_0^T(x,\, \dot{x})\right]^2},\; c_{\varphi}(x,\, \dot{x}) = \left|\varphi_0^T(x,\, \dot{x})\right|. \tag{3}$$

Поля (3) задают распределения в фазовом пространстве $(x,\, \dot{x})$ мгновенных сложностей статической и динамической составляющих структуры интегральных траекторий $x(t)$ [2]. Для пробной интегральной траектории L_T возможно рассчитать абсолютные сложности

$$C_\circ = \int\limits_{(L_T)} c_\circ(x,\, \dot{x})\, \mathrm{ds}. \tag{4}$$

Причём в качестве L_T могут выступать: траектории управления; истинные траектории системы (точные, интерполированные, возмущённые); а также искусственные траектории позволяющие выявлять особенности и отличия в динамике системы в той или иной области фазового пространства $(x,\, \dot{x})$.

Отметим, что величины (3) и (4) несут важную информацию о динамических характеристиках исследуемой системы в пространстве Ω. Именно сложность интегральных траекторий, в частности, определяет предсказуемость и характер эволюции системы (детерминированное или хаотическое поведение).

1. *Макаренко А.В.* Исследование динамической структуры автономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве «состояние-скорость-кривизна». // Сборник тезисов IX Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». – Москва, ИПУ РАН, 2006.

2. *Макаренко А.В.* Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. № 4.