

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ АВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЕ-СКОРОСТЬ-КРИВИЗНА

А. В. Макаренко

СКГМИ (ГТУ), Владикавказ, Россия

Введём в рассмотрение динамическую систему заданную автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (подобный класс уравнений, в частности, широко применяется для описания нелинейных колебательных систем):

$$\ddot{x} = Q(x, \dot{x}). \quad (1)$$

Причём $x \in X \subset R^1$, функция $Q(x, \dot{x})$ – гладкая, непрерывная, определена в области $G \subset R^2$, и имеет в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого, а уравнение удовлетворяет теоремам о существовании и единственности решения.

Сформируем функцию, которая в каждой точке фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ задаёт мгновенную динамическую кривизну интегральных траекторий $x(t)$, $t \in T \subset R^1$ системы (1) в пространстве $\Omega = X \times T$:

$$\varphi_0^T(x, \dot{x}) = \frac{Q(x, \dot{x})}{1 + \dot{x}^2}. \quad (2)$$

Дополнительно к ней, введём функцию характеризующую динамические свойства системы (1) в пространстве Ω :

$$\beta_2^T(x, \dot{x}) = \dot{x} \varphi_0^T(x, \dot{x}). \quad (3)$$

Отметим, что величины φ_0^T и β_2^T были предложены ранее в работе [1] применительно к задаче исследования динамической структуры одномерных гладких сигналов во временной области.

Установлено, что карта топологической структуры разбиения фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ на области с постоянным знаком величины β_2^T облегчает построение поля направлений фазовых траекторий и даёт дополнительную информацию о наличии и характере колебательных режимов в системе. В свою очередь, кривые в пространстве $(x, \dot{x})$ отвечающие условию $\beta_2^T = 0$ выделяют на интегральных траекториях $x(t)$ точки, в которых локальная предсказуемость состояний системы, при определённых условиях, имеет наибольшую точность.

Показано, что различные интегральные меры величины β_2^T и их соотношения способны в количественном смысле охарактеризовать различные динамические свойства системы (1) в целом. В частности, такая важная характеристика, как *коэффициент неравновесности системы*, в первом приближении выражается следующим образом:

$$B_2^T = \iint_{(G)} \beta_2^T(x, \dot{x}) dG. \quad (4)$$

В динамике системы преобладают процессы: $B_2^T > 0$ – расходящиеся; $B_2^T < 0$ – сходящиеся; $B_2^T = 0$ – система скомпенсирована.

Таким образом, описанный подход дополняет качественную теорию динамических систем позволяя анализировать уравнения вида (1) без их интегрирования и получать качественную и в определённом роде количественную информацию о динамических характеристиках исследуемой системы в пространстве Ω .

Список литературы

1. Макаренко А.В. Геометрический подход к описанию и анализу динамической структуры сигнала. // Материалы XIII Зимней школы-семинара по СВЧ-электронике и радиофизике. / Под общ. ред. Д. И. Трубецкова. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2006.

ANALYSIS OF DYNAMIC STRUCTURE OF THE AUTONOMOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER IN SPACE THE STATE-SPEED-CURVATURE

A. V. Makarenko

Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University) of Vladikavkaz, Russia

In present paper an approach has been suggested. The statements of this approach supplement classical methods of qualitative research on a phase plane of the autonomous ordinary differential equations of the second order. The essence of this approach consists in analysis of a scalar field of dynamic bend of integrated trajectories of equation in phase space "state-speed". The introduced characteristic magnitudes and criteria allow to derive qualitative and some quantitative information concerning features of system dynamic in the expanded space of states without resorting to integration of equation.