

АНАЛИЗ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ СОСТОЯНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. В. Макаренко

Федеральное космическое агентство РФ

ОАО «НПК «Системы прецизионного приборостроения», Москва, Россия

Введём в рассмотрение динамическую систему, определённую в области $X \subseteq \mathbb{R}^n$, вида:

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_4 |\dot{\mathbf{x}}|^2 + \mathbf{a}_3 |\dot{\mathbf{x}}| + a_2 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathbb{R}^n, a_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом система (1) в целом удовлетворяет теоремам о существовании и единственности решения $\mathbf{x}(t)$ на T , $T \subseteq \mathbb{R}$, $T \ni t$.

Поставим задачу оценить предсказуемость состояний системы (1) в моменты времени $t' > t_0$, $(t', t_0) \in T$ [1]. При этом для решения системы задаются начальные условия: $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$; $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Под предсказуемостью будем понимать величину I_p – количество информации, которое необходимо получить чтобы выяснить состояние системы с точностью до ΔX – элемента объёма пространства состояния [1]. Количество информации I_p (в «битах» – двоичных единицах) выразим через энтропию состояний системы:

$$(2) \quad I_p = - \int_X p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \log_2 \Delta X, \quad \Delta X = \prod_{i=1}^n \Delta X_i,$$

причём $\Delta X_i \in X$, $\Delta X_i > 0$, $I_p \geq 0$. Естественно считать, что если $I_p = 0$ – то состояние системы известно с точностью до ΔX , если $I_p = \infty$ – состояние системы абсолютно непредсказуемо.

Величину I_p будем рассчитывать в предположении о равномерной плотности распределения состояний $\mathbf{x}$ на $X_p \subseteq X$:

$$(3) \quad p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{V_p} & \mathbf{x} \in X_p, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}, \quad V_p = \int_{X_p} d x_p, \quad \Delta X \leq V_p.$$

Вид плотности (3) максимизирует I_p на X_p – области определяемой допустимыми состояниями системы и рядом ограничений.

Далее можно показать, что система (1), при различной комбинации коэффициентов $\mathbf{a}_{1,3,4}$, a_2 и начального условия $\dot{\mathbf{x}}_0$, реализует различные модели предсказания состояний реальных динамических

систем с C^1 -гладкими траекториями, в том числе «стандартные»:

$$(4) \quad \mathbf{x}(t') = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}(t') = \dot{\mathbf{x}}_0, |\ddot{\mathbf{x}}(t')| = |\ddot{\mathbf{x}}_0|, |\ddot{\mathbf{x}}(t')| \propto |\dot{\mathbf{x}}(t')|.$$

В работе найдена мажоранта траекторий моделей (4), являющаяся решением дифференциального уравнения:

$$(5) \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}_0}{c_{as} c_{ss}} \{1 + c_{ss}^2 \dot{\mathbf{x}}^2\}, \quad |\mathbf{f}_0| = \varphi_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

коэффициенты $c_{ss}, c_{as} \in \mathbb{R}^+$. Уравнение (5) эквивалентно (1) при $a_2 = 0, \mathbf{a}_3 = 0, \mathbf{a}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{a}_4$. Оно определяет новую модель предсказания состояний реальных динамических систем – через C^1 -гладкие траектории с постоянной динамической кривизной φ_0 [1, 2]. Решение уравнения порождает $X_{tr}(t') \subseteq X_p(t')$ – выпуклую область допустимых состояний системы в момент времени t' . При этом решение принадлежит $\mathbb{R}^n$ и определяется через чётную функцию, что делает его инвариантным к обращению времени.

Кардинальным отличием модели (5) от моделей (4) является наличие в ней режима с обострением. Это приводит к появлению горизонта предсказуемости τ_{hp} , при котором $I_p(t_0 + \tau_{hp}) = \infty$. Таким образом показывается: динамическая система с C^1 -гладкой траекторией однозначно предсказуема на интервале $T_p = (t_0, t_0 + \tau_{hp})$.

Над решением (5) также определяется ряд параметров характеризующих свойства динамической системы на интервале T_p .

Список литературы

1. Макаренко А.В. Об одном подходе к вычислению горизонта локальной предсказуемости сигнала. // 61-я научная сессия, посвящённая дню Радио. / Сборник докладов. – Москва, РНТОРЭС, 2006.
2. Макаренко А.В. Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, № 4, 2006.

THE ANALYSIS PREDICTABILITY STATES OF MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEMS

A. V. Makarenko

Open Joint-stock Company «Research-and-Production Corporation
«Precision System and Instruments», Russia

The new model of prediction state of multidimensional dynamic systems ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, C^1$) has been introduced in present paper. This model settle on φ_0 – dynamic curvature of solution system.