

# ОЦЕНИВАНИЕ СЛОЖНОСТИ ХАОТИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В АСПЕКТЕ ФОРМЫ ИХ ТРАЕКТОРИЙ

А.В. Макаренко

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [avm.science@mail.ru](mailto:avm.science@mail.ru)

**Ключевые слова:** хаотическая динамика, сложность, форма траектории, символический СТQ-анализ

**Аннотация:** Изложен новый подход к количественному оцениванию сложности многомерных дискретных последовательностей в аспекте форм их траекторий в расширенном пространстве состояний, основанный на исследовании их структурных свойств. Метод пригоден для оценивания сложности как хаотических, так и стохастических последовательностей. Метод построен на ранее предложенном автором символическом СТQ-анализе многомерных дискретных последовательностей и отображений. Метод позволяет обнаруживать факт и измерять характеристики перестройки структуры аттракторов. Проведённое численное исследование осциллятора Рёсслера в двух режимах (ленточный и винтовой хаос) показало полное соответствие полученных результатов выводам теоретического анализа, сделанного ранее. Дополнительный пример (финансовые временные ряды) демонстрирует прикладной аспект применения разработанного инструментария.

## 1. Введение

Понятие «сложность» какого либо объекта является его важнейшей структурно-информационной характеристикой, и относится к числу фундаментальных научных понятий [1,2]. Не является исключением и более узкое понятие «сложность динамического процесса». С ней увязывают предсказуемость и информационную ёмкость процессов [3]. Она входит в состав критериев классифицирующих процессы как детерминированные, хаотические, стохастические [4]. Однако, наряду с этим, вопросы определения и вычисления сложности динамических процессов остаются методологически открытыми [2].

Впервые количественный подход к понятию «сложность» был сформулирован в статистической физике равновесных систем в 1877 году с введением Людвигом Больцманом понятия «энтропия» [5]:  $H = k_B \ln W$ , где:  $W$  – число микросостояний системы, реализация которых возможна в имеющемся макроскопическом состоянии;  $k_B$  – постоянная Больцмана. Р. Хартли фактически распространил положения статистической физики на описание состояний макросистем и придал энтропии информационный смысл [6].

Дальнейшее развитие эта идея получила в работах К. Шеннона по теории информации [7], в которых для  $p(x_i)$  – вероятностных распределений независимых случайных событий  $x_i$  было также введено понятие энтропии:

$$(1) \quad H = - \sum_i p(x_i) \ln p(x_i).$$

Обобщение энтропии Шеннона на случай динамических систем было проведено А.Н. Колмогоровым и Я.Г. Синаем в созданной ими энтропийной теории динамических систем [8].

Развитие нелинейной динамики, теории хаотических динамических систем, теории неравновесных систем, потребовало введения соответствующих характеристик, таких как показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова, S-параметр Климонтовича [9, 10]. Примечательно, что эти параметры по своей сути также связаны с энтропией Шеннона.

Тем не менее, все широко распространённые модификации энтропийной меры Больцмана-Шеннона обладают особенностями, ограничивающими их применимость [11]. В дополнение к энтропии Больцмана-Шеннона были предложены формализмы Реньи и Тсалисса [11].

В начале 80-х годов XX века А.Н. Колмогоров предложил принципиально новый, алгоритмический подход к интерпретации понятия «сложность» [12]. Критерий был формализован на языке теории алгоритмов и для него была построена соответствующая мера, которая обладает неоспоримыми информационными достоинствами. Но применять её для оценивания сложности динамических процессов весьма затруднительно, так как она весьма трудоёмка для вычисления и интерпретации результатов.

В работе [13] предложен оригинальный подход к исчислению сложности скалярного динамического процесса основанный на идее информационных затрат, требующихся для аппроксимации процесса с требуемой точностью. Подход идейно близок к алгоритмическому подходу А.Н. Колмогорова. Его ограничением является условность и необоснованность выбора того или иного аппроксимирующего базиса.

В радиофизике активно применяется частотно-временной критерий сложности [14]. Мерой является произведение ширины спектра на длительность динамического процесса:

$$(2) \quad \Delta t \Delta \omega = 4 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}, \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Критерий не учитывает форму спектра, оперирует эффективными значениями ширины спектра и длительности динамического процесса, что делает оценку сложности несколько условной. Более того, мера (2) накладывает ограничения на минимальную скорость убывания функций  $x(t)$  и  $|S(\omega)|$ , и имеет скорее энергетический, нежели информационный смысл.

Недавно В.И. Арнольд [15] предложил подход к вычислению сложности решётчатых последовательностей вида  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  (последовательности 0 и 1). Метод базируется на формализации структуры последовательностей – для них строится отображение в себя (через циклическую разность), после чего это отображение представляется в виде графа, по характеристикам которого определяется сложность исходной последовательности. Сильным ограничением этого метода является невозможность переноса созданной меры сложности на  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{Z}$ -континуальные процессы.

Стоит также отметить так называемую периметрическую сложность для оценивания сложности двумерных изображений [16]. В данном случае изображение возможно трактовать как двумерное скалярное поле. Сильнейшее ограничение метода – применимость только к бинарным изображениям (класс  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^2$ ).

В настоящей работе предложен иной подход к анализу сложности хаотических последовательностей – через исследование их структурных свойств в аспекте форм их траекторий. Данный подход свободен от большинства недостатков подходов приведённых выше и основывается на методе символического СТQ-анализа [17]. Этот метод символического анализа является вычислительно ориентированным и направлен на исследование многомерных дискретных последовательностей и отображений. Формализм СТQ-анализа изучает свойства динамических систем, важные с позиций вопросов идентификации, управления и предсказания их эволюции.

Кроме того, подход позволяет анализировать уровень синхронизации и её временную структуру в сложных ансамблях сильно нестационарных и неидентичных хаотических осцилляторов больших размерностей с произвольной конфигурацией и топологией сети (решётки) [18].

Данная работа является продолжением исследования, впервые представленного автором на XXV IUPAP Conference on Computational Physics [19]. Все вычисления и визуализация выполнены в программе Wolfram Mathematica 9.

## 2. Символический СТQ-анализ

Определим дискретную динамическую систему в виде отображения:

$$(3) \quad \mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}),$$

со свойствами:

$$\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad k \in K \subset \mathbb{N}, \quad \mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^M, \quad n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}, m = \overline{1, M}.$$

В формуле (3) величина  $\mathbf{s}$  – это переменная состояния системы,  $\mathbf{p}$  – вектор параметров. С отображением (3) ассоциируем траекторию системы в пространстве  $S \times K$  в форме последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ .

Введём в рассмотрение основное преобразование символического СТQ-анализа [17]:

$$(4) \quad \left\{ \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} \right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \quad T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots T_k^{\alpha\varphi}|_N], \quad \{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K,$$

где  $T^{\alpha\varphi}|_n$  – символ T-алфавита:

$$(5) \quad T_o^{\alpha\varphi} = \{T_0, T_1, T_2, T_3N, T_3P, T_4N, T_4P, T_5N, T_5P, T_6, T_7, T_8N, T_8P\}.$$

Геометрия символов из множества  $T_o^{\alpha\varphi}$  показана на рисунке 1.

Также дополнительно определим  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  – символ Q-алфавита ( $Q_o^{\alpha\varphi} \ni Q^{\alpha\varphi}|_n$ ):

$$(6) \quad Q_k^{\alpha\varphi}|_n \equiv T_k^{\alpha\varphi}|_n \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n, \quad Q_k^{\alpha\varphi} = [Q_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots Q_k^{\alpha\varphi}|_N], \quad \{Q_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K.$$

Все корректные символы из множества  $Q_o^{\alpha\varphi}$  показаны на рисунке 2 (символы представлены в форме перехода  $T_k^{\alpha\varphi}|_n \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n$ ).

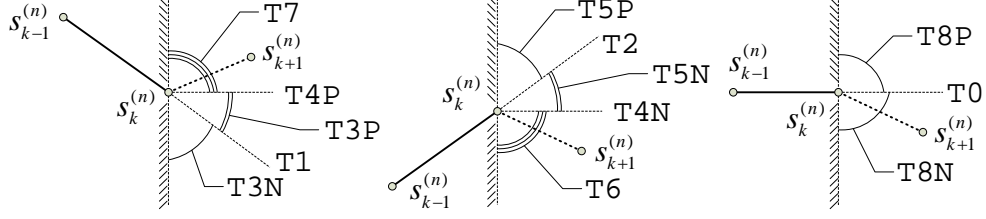


Рис. 1. Геометрия символов T-алфавита.

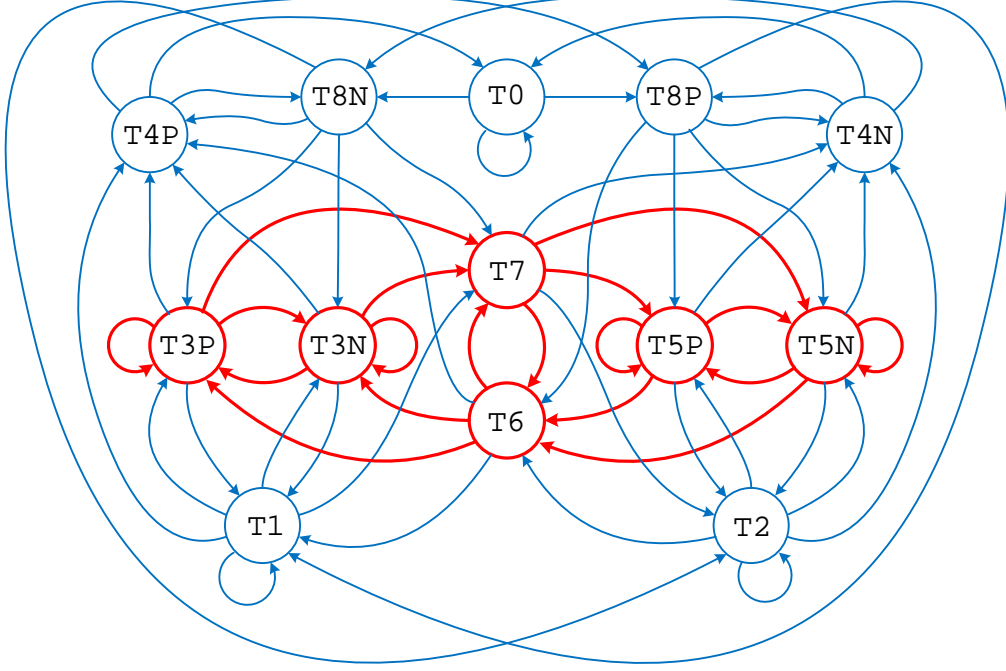


Рис. 2. Граф  $\Gamma_o^{TQ}$ .

В работе автора [20] введён в рассмотрение символический TQ-образ последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$ . Этот образ определён в форме направленного графа:

$$(7) \quad \Gamma^{TQ}|_n = \langle V^\Gamma|_n, E^\Gamma|_n \rangle, \quad \Gamma^{TQ} = [\Gamma^{TQ}|_1 \dots \Gamma^{TQ}|_N],$$

где  $V^\Gamma|_n \subseteq T_o^{\alpha\varphi}$  – вершины  $\Gamma^{TQ}|_n$  и  $E^\Gamma|_n \subseteq Q_o^{\alpha\varphi}$  – рёбра  $\Gamma^{TQ}|_n$ . Граф  $\Gamma^{TQ}|_n$  соответствующий полным алфавитам  $T_o^{\alpha\varphi}$  и  $Q_o^{\alpha\varphi}$  определим как  $\Gamma_o^{TQ}$  (см. рисунок 2).

Граф (7) возможно разметить и взвесить через частоты появления в последовательности  $\{s_k^{(n)}\}_{k=1}^K$  символов  $*$ :

$$(8) \quad \Delta^*|_n = \frac{|M^*|_n|}{\left| \bigcup_* M^*|_n \right|}, \quad 0 \leq \Delta^*|_n \leq 1,$$

здесь  $|\circ|$  – мощность множества,  $*$  – некий символ, из которого состоит мультимножество  $M^*|_n$ :

$$(9a) \quad \Delta^T|_n : \quad M^*|_n \ni T_k^{\alpha\varphi}|_n : T_k^{\alpha\varphi}|_n \setminus T = *, \quad * \in T_o^{\alpha\varphi} \setminus T,$$

$$(9б) \quad \Delta^Q|_n : \quad M^*|_n \ni Q_k^{\alpha\varphi}|_n : Q_k^{\alpha\varphi}|_n \setminus Q = *, \quad * \in Q_o^{\alpha\varphi} \setminus Q.$$

Отметим, что вычисление величин (9а) и (9б) позволяет количественно оценивать различные свойства формы траектории последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  в пространстве  $S \times K$ .

### 3. Меры сложности

Подход к исчислению сложности многомерных дискретных отображений и последовательностей, представленный в настоящей статье, неформально определяется через следующее высказывание: *более сложный динамический процесс, имеет более сложную форму траектории в пространстве  $S \times K$* . Далее это высказывание представлено в формализованном виде.

Для начала каждому из символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  поставим в соответствие числовое значение сложности – так называемую *удельную сложность символа*:  $C^T|_n$  и  $C^Q|_n$ .

Удельные сложности для символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  определим исходя из их геометрии. Величины  $C^T|_n$  приведены в таблице 1.

Таблица 1. Удельные сложности символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$ , (\* = N, P).

$T^{\alpha\varphi} _n$	T0	T1, T2	T4*, T8*	T3*, T5*	T6, T7
$C^T _n$	1	2	4	5	6

Сложность символа  $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$  определим на основе расстояния между  $T_k^{\alpha\varphi}|_n$  и  $T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n$ :

$$(10) \quad C^Q|_n = d_T(T_k^{\alpha\varphi}|_n, T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n) + 1.$$

Мера  $d_T(\cdot, \cdot)$  – есть количество ребёр на кратчайшем пути между двумя вершинами в графе  $D_T$  (см. рисунок 3).

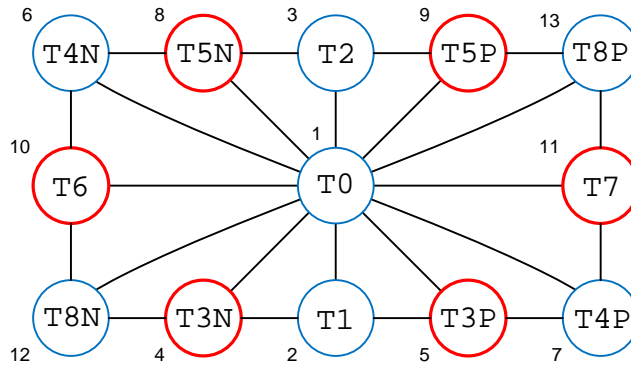


Рис. 3. Граф  $D_T$  отвечает переходам между символами  $T^{\alpha\varphi}|_n$  для  $k$ -го отсчёта подпоследовательности  $\{s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}, s_{k+1}^{(n)}\}$ , при её различных непрерывных деформациях [21].

Сложность хаотических последовательностей, в рамках излагаемого подхода, будем оценивать по мерам сложности графа  $\Gamma^{TQ}|_n$ . Учитывая, что граф взвешенный и размеченный, меры определим как топологические, так и метрические. С учётом того, что каждому из символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  (фактически вершинам и рёбрам графа)

приписана удельная сложность, введём в рассмотрение вырожденную и взвешенную меры сложности. Ниже каждую из мер рассмотрим подробнее.

### 3.1. Вырожденные меры сложности

Вырожденные меры сложности оперируют исключительно свойствами графа  $\Gamma^{TQ}|_n$ . При этом удельные сложности символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  формально считаются равными единице. Вырожденные топологическую и метрическую меры сложности запишем в виде:

$$(11a) \quad \mathbf{C}_{\Gamma}^{dt}|_n = [C_{\Gamma T}^{dt}|_n, C_{\Gamma Q}^{dt}|_n]^T, \quad C_{\Gamma\circ}^{dt}|_n = \sum_* \text{sign } \Delta^*|_n,$$

$$(11b) \quad \mathbf{C}_{\Gamma}^{dm}|_n = [C_{\Gamma T}^{dm}|_n, C_{\Gamma Q}^{dm}|_n]^T, \quad C_{\Gamma\circ}^{dm}|_n = \exp H^{\Gamma\circ}|_n,$$

где:  $* \in T_o^{\alpha\varphi} : \circ = T$ ,  $* \in Q_o^{\alpha\varphi} : \circ = Q$ ,  $H^{\Gamma\circ}|_n$  – энтропия Больцмана-Шеннона компонент  $V^{\Gamma}|_n$  и  $E^{\Gamma}|_n$  графа  $\Gamma^{TQ}|_n$ :

$$H^{\Gamma\circ}|_n = - \sum_* \Delta^*|_n \ln \Delta^*|_n.$$

Из свойств вырожденных мер сложности следует ряд нестрогих неравенств:

$$1 \leq C_{\Gamma\circ}^{dt}|_n, \quad 1 \leq C_{\Gamma\circ}^{dm}|_n, \quad C_{\Gamma\circ}^{dm}|_n \leq C_{\Gamma\circ}^{dt}|_n.$$

### 3.2. Взвешенные меры сложности

Взвешенные меры сложности есть расширение над вырожденными мерами. То есть взвешенные меры в свой состав включают также и удельные сложности символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ . Взвешенные топологическую и метрическую меры запишем в виде:

$$(12a) \quad \mathbf{C}_{\Gamma}^{wt}|_n = [C_{\Gamma T}^{wt}|_n, C_{\Gamma Q}^{wt}|_n]^T, \quad C_{\Gamma\circ}^{wt}|_n = \sum_* C^*|_n \text{sign } \Delta^*|_n,$$

$$(12b) \quad \mathbf{C}_{\Gamma}^{wm}|_n = [C_{\Gamma T}^{wm}|_n, C_{\Gamma Q}^{wm}|_n]^T, \quad C_{\Gamma\circ}^{wm}|_n = \begin{cases} 0 & C_{\Gamma\circ}^{wt}|_n = 0, \\ \exp \tilde{H}^{\Gamma\circ}|_n & \text{otherwise.} \end{cases},$$

where:  $* \in T_o^{\alpha\varphi} : \circ = T$ ,  $* \in Q_o^{\alpha\varphi} : \circ = Q$ ,  $\tilde{H}^{\Gamma\circ}|_n$  – weighted Renyi entropy of graph  $\Gamma^{TQ}|_n$ :

$$\tilde{H}^{\Gamma\circ}|_n = \frac{1}{1-q} \ln \sum_* C^*|_n \left( \tilde{\Delta}^*|_n \right)^q,$$

$$\tilde{\Delta}^*|_n = \frac{\hat{\Delta}^*|_n}{\sum_* C^*|_n \hat{\Delta}^*|_n}, \quad \hat{\Delta}^*|_n = \frac{(\Delta^*|_n)^{b_\circ}}{C^*|_n}, \quad b_\circ = \frac{\ln C_{\Gamma\circ}^{wt}|_n - \ln C^*|_n}{\ln C_{\Gamma\circ}^{dt}|_n}.$$

Свободный (управляющий) параметр в  $\tilde{H}^{\Gamma\circ}|_n$  в первом приближении (по аналогии с работой [11]) запишем в форме:

$$q \propto 1 + \ln \frac{\max C^*|_n}{\min C^*|_n}.$$

Отметим, что в настоящий момент ведутся исследования по строгой формализации параметра  $q$ .

Из свойств взвешенных мер сложности следует ряд нестрогих неравенств:

$$1 \leq C_{\Gamma_0}^{wt}|_n, \quad 1 \leq C_{\Gamma_0}^{wm}|_n, \quad C_{\Gamma_0}^{wm}|_n \leq C_{\Gamma_0}^{wt}|_n.$$

## 4. Примеры

Продemonстрируем возможности разработанных мер сложности хаотических дискретных последовательностей на двух примерах: (i) – осциллятор Рёсслера, раздел 4.1. и (ii) – финансовые временные ряды, раздел 4.2.. Причём первый пример – это эталонный, хорошо изученный объект нелинейной динамики. Второй пример – имеет прикладную ценность в разрезе исследований по макроэкономике и стохастической финансовой математике.

### 4.1. Осциллятор Рёсслера

Исследуем численно TQ-сложность траекторий системы Рёсслера [22], для случая ленточного ( $r = r_b$ ) и винтового ( $r = r_s$ ) хаоса:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r), \quad p = 0.2, \quad q = 0.1,$$

(13) band-type хаос:  $r = r_b = 4.4$ , screw-type хаос:  $r = r_s = 12$ .

Фазовые портреты этих хаотических режимов приведены на рисунке 4.

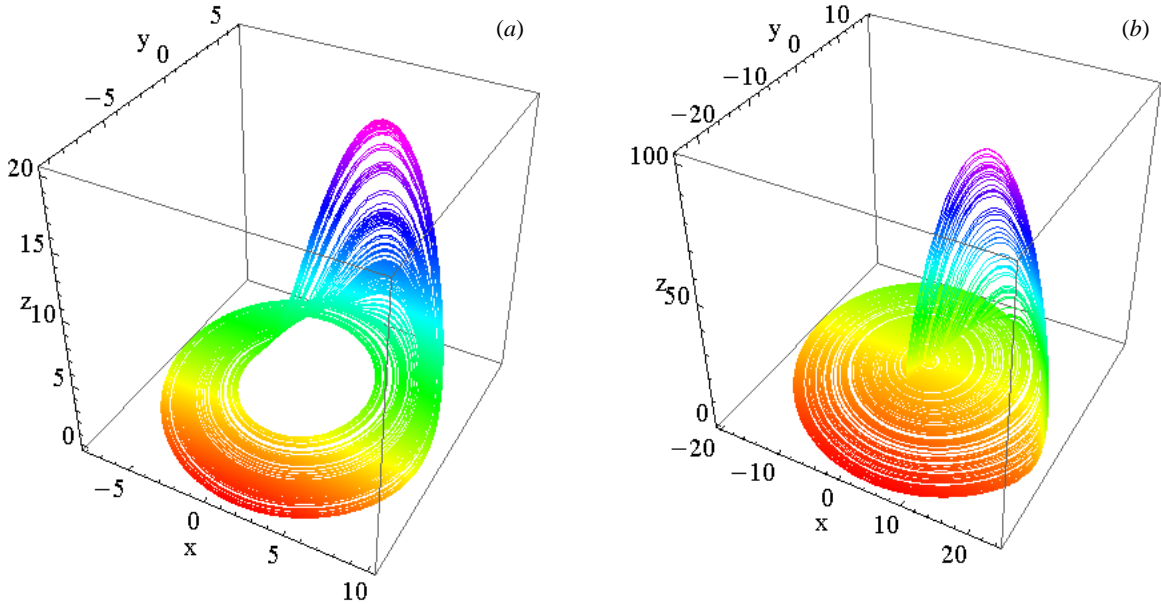


Рис. 4. Фазовые портреты осциллятора Рёсслера: (a) – ленточный хаос; (b) – винтовой хаос.

Известно [22, 23], что режим винтового хаоса более сложен, нежели режим ленточного хаоса, в том числе и из-за присутствия в первом – гетероклинических орбит Шильникова [24]. Сверим данную информацию с результатами численного эксперимента на основе мер сложности введённых в разделе 3..

Описание численного эксперимента. Метод интегрирования: Рунге-Кутта 5-го порядка, с фиксированным шагом. Период интегрирования:  $T = [0, 8 \times 10^3]$ . Шаг по времени:  $\Delta t = 10^{-2}$ . Количество траекторий:  $N = 10^4$  (для каждого режима:  $r = r_b$  и  $r = r_s$ ). Начальные условия:

$$r = r_b : x_0 = \xi_1 \in [-7, 7], y_0 = \xi_2 \in [-7, 7], z_0 = \xi_3 \in [0, 15],$$

$$r = r_s : x_0 = \xi_1 \in [-26, 26], y_0 = \xi_2 \in [-26, 26], z_0 = \xi_3 \in [0, 100],$$

где  $\xi_{1-3}$  – некоррелированные псевдослучайные переменные с равномерным распределением. Аналитический период:  $T' = [7, 8] \times 10^3$ . Количество отсчётов в последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$ :  $K = 10^5$ . Границы интервалов вычисляемых величин оценивались по вероятности:  $\beta = 0.9999$ .

Результаты расчёта сложности по формулам раздела 3. таковы. Топологическая сложность обоих хаотических режимов по символам  $T^{\alpha\varphi}|_n$  – идентична:  $C_{\Gamma T}^{dt}|_{xyz} = 6$ ,  $C_{\Gamma T}^{wt}|_{xyz} = 32$ , а по символам  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  – различна, см. рисунок 5. Метрическая сложность хаотических режимов ( $r = r_b$  and  $r = r_s$ ) различается, как по символам  $T^{\alpha\varphi}|_n$ , так и по символам  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ , см. рисунок 6.

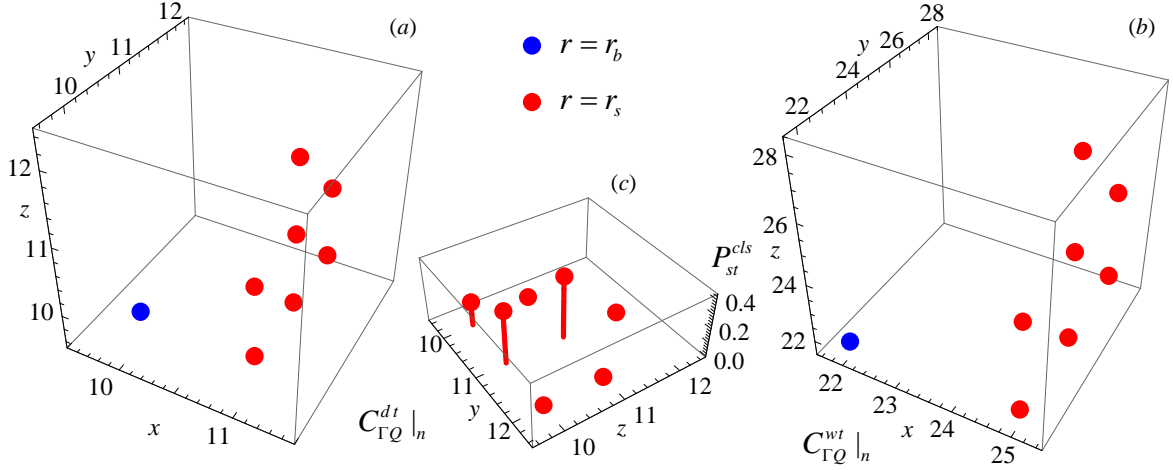


Рис. 5. Топологическая сложность траекторий осциллятора Рёсслера в части символов  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ : (a) – Вырожденная; (b) – Взвешенная; (c) – распределение вероятностей различных значений сложности  $C_{\Gamma Q}^{dt}|_n$ .

Из рисунков 5 и 6 видно, что все траектории в режиме band-type chaos ( $r = r_b$ ) имеют “однородную” сложность, тогда как в режиме screw-type chaos ( $r = r_s$ ) траектории распадаются на несколько кластеров, имеющих различную сложность в части символов  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ : 7 кластеров в случае топологических мер (как вырожденных, так и взвешенных); 3 кластера в случае взвешенной метрической меры. При этом соответствующие кластеры не являются равновероятными, что хорошо видно из рисунков 5c и 6e. Так, вероятность принадлежности траектории кластерам В, С и D (см. рисунки 6d и e) оценивается на уровне: 0.0043, 0.7934 и 0.2023, соответственно. Предварительный анализ не выявил связь между принадлежностью траектории указанным кластерам и начальными условиями при интегрировании системы (4.1.). В настоящий момент проводятся дополнительные исследования по установлению причин разделения траекторий на кластеры В, С и D.

Из полученных результатов следует однозначный вывод: screw-type хаос сложнее нежели band-type хаос. Этот вывод находится в полном согласии с теоретическими



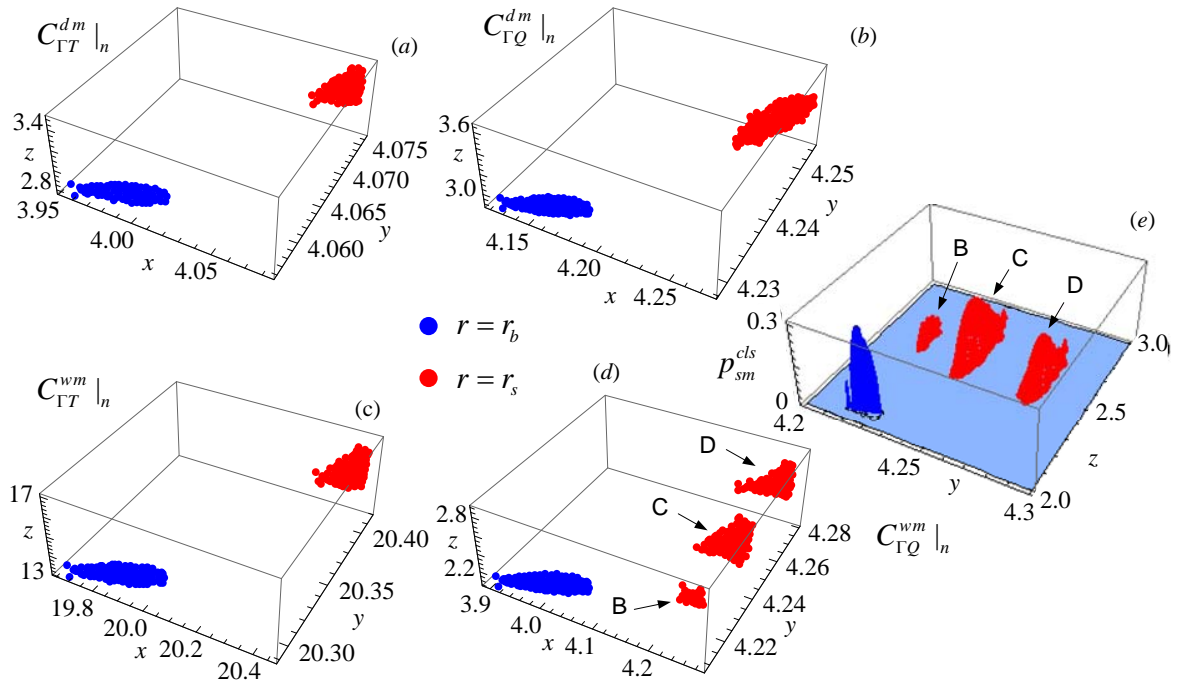


Рис. 6. Метрическая сложность траекторий осциллятора Рёсслера: (a) и (b) – Вырожденная; (c) и (d) – Взвешенная; (e) – плотность распределения траекторий по различным значениям сложности  $C_{\Gamma Q}^{wm}|_n$  (в логарифмическом масштабе).

результатами [22,23]. Таким образом пример с осциллятором Рёсслера демонстрирует корректность и информативность разработанных мер сложности.

## 4.2. Временные ряды финансовых индикаторов

В настоящей работе также исследована сложность временных рядов курсов обмена некоторых мировых валют (Доллар США [USD], Евро [EUR], Японская йена [JPY], Швейцарский франк [CHF], и Британский фунт [GBP]) по отношению к Рублю РФ [RUB] за период с 01.01.1999 г. по 31.03.2013 г. Исходные данные взяты с официального web-сайта Центрального банка России (Банк России, Курс обмена валют, [http://www.cbr.ru/currency\\_base/dynamics.aspx](http://www.cbr.ru/currency_base/dynamics.aspx)). Длина временных рядов:  $K = 3\,545$  отсчётов. Исходные временные ряды показаны на рисунке 7.

Результаты расчёта сложности по формулам раздела 3. приведены на рисунке 8.

Из результатов анализа видно, что пара USD/RUB существенно превосходит по сложности временного ряда остальные валютные пары. Из этого можно сделать два предварительных вывода: (i) динамика формирования валютной пары USD/RUB существенно отличается от таковой для других валютных пар (возможно даже на уровне финансово-экономических механизмов); (ii) временной ряд пары USD/RUB более сложен для предсказания [4], нежели временные ряды других пар. Эти выводы в принципе находятся в хорошем согласии и дополняют ранее полученные результаты [25].

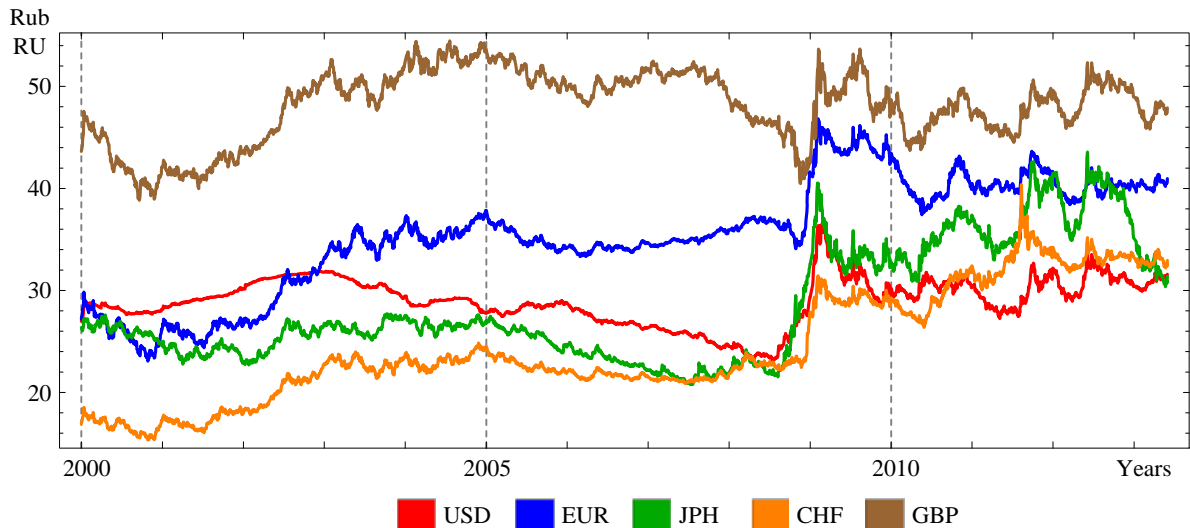


Рис. 7. Временные ряды курсов обмена валют.

## 5. Заключение

Итак, в представленной работе предложен новый подход к количественному оцениванию сложности многомерных хаотических последовательностей в аспекте форм их траекторий в пространстве  $S \times K$ , основанный на исследовании их структурных свойств. Данный подход свободен от большинства недостатков существующих способов оценивания сложности динамических процессов и основывается на методе символического СТQ-анализа.

Проведённый численный эксперимент (исследование осциллятора Рёсслера в двух хаотических режимах) показал адекватность предложенных мер сложности: винтовой хаос более сложен нежели ленточный. Кроме того, данный эксперимент продемонстрировал информативность подхода по обнаружению факта перестройки структуры аттракторов (хаос различен по сложности). Причём эта перестройка также оценивается в виде числовых характеристик. При этом обнаружено, что траектории осциллятора Рёсслера в режиме винтового хаоса расслаиваются на явно выраженные кластеры по величине сложности. Предварительный анализ показал, что начальные условия при интегрировании не определяют принадлежность траектории тому или иному кластеру. В настоящий момент проводятся дополнительные исследования для установления причин и механизмов кластеризации траекторий.

Тем не менее, необходимо отметить, что предложенные меры сложности оперируют частотами появления символов, и при этом игнорируют порядок их следования. За счёт этой особенности меры не различают процессы отличающиеся только уровнем перемешивания символов. В настоящий момент проводятся дополнительные исследования по устранению данного ограничения и расширению аналитических возможностей предложенного подхода к оцениванию сложности дискретных последовательностей.

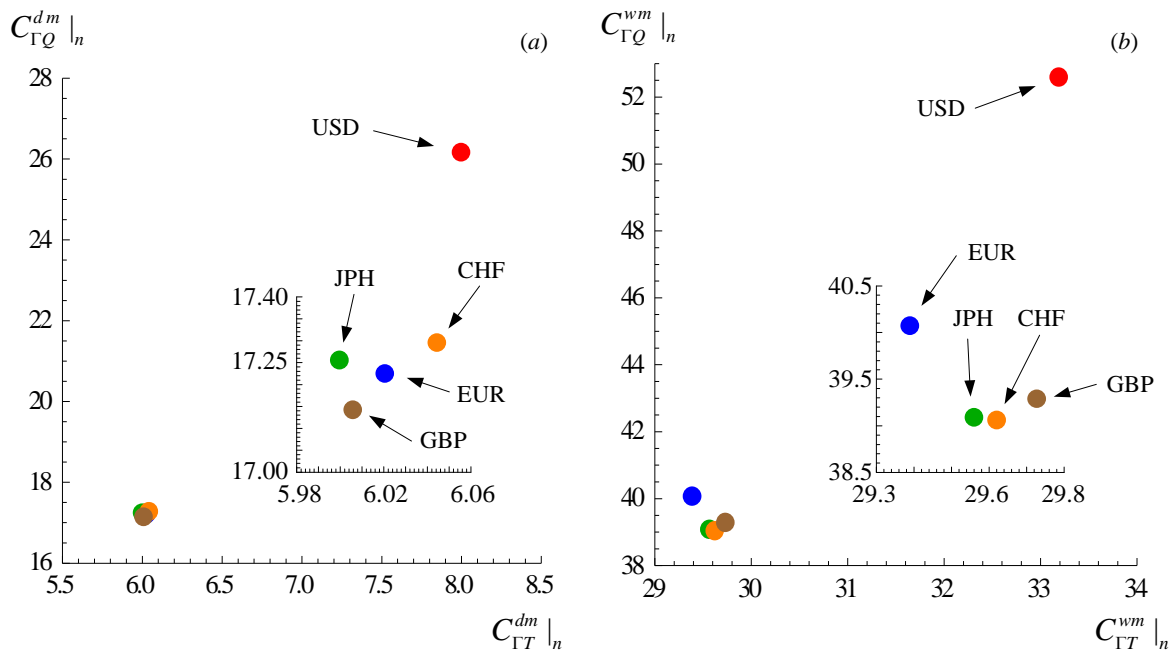


Рис. 8. Сложность временных рядов курсов обмена валют. Метрическая мера сложности: (a) – Вырожденная; (b) – Взвешенная.

## Список литературы

1. Complexity, Science and Society, eds. J. Bogg, R. Geyer, Radcliffe Publishing, 2007.
2. Measurements of Complexity: Proceedings of the Conference. Rome, September 30 - October 2, 1987. Eds. L. Petiti, A. Vulpiari // Lecture Notes in Physics. 1988. Vol. 314.
3. Badii R., Politi A. Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
4. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. 1989. Том 158. Вып. 5. С. 93-122.
5. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
6. Хартли Р. Передача информации, в сборнике «Теория информации и ее приложения». Под ред. А.А. Харкевича, Физматгиз, 1959.
7. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова. М.: ИЛ, 1963.
8. Корнфельд И.П., Синай Я.Г. Энтропийная теория динамических систем // Совр. пробл. мат. Фундам. направления. 1985. Т. 2. ВИНТИ, М., С. 44-70.
9. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001.
10. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
11. Башкиров А.Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем // ТМФ. 2006. Том 149. Вып. 2. С. 299-317.
12. Колмогоров А.Н. Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // Успехи мат. наук. 1983. Том 38. Вып. 4. С. 27-36.
13. Дарховский В.С., Каплан А.Я., Шишкин С.Л. О подходе к оценке сложности кривых (на примере электроэнцефалограммы человека) // Автомат. и телемех. 2002. № 3. С. 134-140.
14. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
15. Arnold V.I. Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions // Funct. Analysis and Other Math. 2006. Vol. 1. Issue 1. pp. 1-15.
16. Attneave F and Arnoult M.D. The quantitative study of shape and pattern perception // Psychological Bulletin. 1956. Vol. 53. Issue 6. pp. 452-471.
17. Макаренко А.В. Символический анализ в пространстве «скорость-кривизна» структуры хаоса в режиме синхронизации // Письма в ЖТФ. 2012. Том 38. Вып. 4. С. 1-9.

18. Макаренко А.В. Мера синхронности многомерных хаотических последовательностей на основе их символьного представления в T-алфавите // Письма в ЖТФ. 2012. Том 38. Вып. 17, С. 53-60.
19. Makarenko A.V. Estimation complexity of chaotic oscillations in aspect of the shape of their trajectories // Book of Abstracts on XXV IUPAP Conf. on Computational Physics. 2013. Moscow: Department of Phys. Sci. of RAS. pp. 52.
20. Макаренко А.В. Символический анализ в пространстве «скорость-кривизна» многомерных динамических процессов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Том 52. Вып. 7. С. 1248-1260.
21. Макаренко А.В. Расстояние между символами T-алфавита и свойства дискретных динамических систем // Международная конференция «Анализ и Особенности» / Тезисы докладов. Москва, Матем. Ин-т им. В.А. Стеклова, 2012, С. 78-79.
22. Rossler O.E. Chaos in abstract kinetics: Two prototypes // Bulletin of Math. Biology. 1977. Vol. 39. Issue 2. pp. 275-289.
23. Gilmore R. and Lefranc M. The topology of chaos. Wiley-Interscience, 2002.
24. Shilnikov L.P., Shilnikov A., Turaev D. and Chua L. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. World Sci, 2001.
25. Makarenko A.V. Symbolic CTQ-analysis — a new method for studying of financial indicators // International Conference "Advanced Finance and Stochastics" / Book of Abstracts — Moscow, 24-28 June 2013, Steklov Mathematical Institute, pp. 63-64.