

УДК: 51-7, 530.182;

MSC: 70K50, 37M10, 37M20, 34C28, 34C15, 34C23;

PACS: 02.70.-c, 05.45.-a, 05.45.Tr.

## ТQ-бифуркации в дискретных динамических системах: исследование качественных перестроений формы колебаний

А. В. Макаренко<sup>a, b, 1</sup>

<sup>a</sup> Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»  
Россия, 101000, Москва, а/я 560, Web: www.rdcn.ru

<sup>b</sup> Институт проблем Управления РАН  
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

В дискретных динамических системах определён новый класс бифуркаций и изложены методы их диагностики и анализа свойств. Исследуемые ТQ-бифуркации реализуются в дискретных отображениях и связаны с качественным перестроением формы траекторий в расширенном пространстве состояний. В рамках демонстрации основных возможностей инструментария проведён анализ логистического отображения в области расположенной справа от предельной точки удвоений периода. Найдены пять критических значений параметра, при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траекторий отображения. Дополнительно проведено исследование так называемого «отображения следа», возникающего в задачах квантово-механического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решёток.

**Ключевые слова:** динамические системы, дискретные отображения, ТQ-бифуркации.

### 1. Введение

Многие детерминированные динамические системы [1,2], в том числе и с конкретным физическим содержанием [3], имеют «квазислучайное» поведение [4,5] и представляют собой широкий класс хаотических систем. В которых, в свою очередь, весьма существенно проявляется фундаментальный феномен, а именно: бифуркационные перестроения структуры аттрактора.

Концепция бифуркаций в динамических системах впервые была выдвинута А. Пуанкаре для описания «расщепления» равновесных решений в семействе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Затем, в связи с широким распространением прикладных задач для теории динамических систем и нелинейных колебаний, бифуркации в основном исследовали в аспекте изменения качественной структуры орбит в результате малых возмущений системы [2]. Подобный аспект объясняется тем, что динамические системы, возникающие в приложениях, как правило, содержат параметры (обычно варьируемые), и поэтому очень важно понимать, как качественный фазовый

---

<sup>1</sup>E-mail: avm.science@mail.ru

портрет изменяется при варьировании (возмущении) параметров. В итоге, трудами многих исследователей, была сформирована современная теория бифуркаций [6]. Причём в современной трактовке, рассматриваются не только бифуркации положений равновесия и предельных циклов, но перестройки системы в целом и, прежде всего, её инвариантных множеств, аттракторов [7]. Следует заметить, что подобная постановка «программы исследований» восходит к работам А.А. Андронова.

Чем же важен феномен бифуркаций для исследования хаотических систем? Образование / разрушение структур, смена режимов синхронизации, подавление хаоса через управление, разрушение хаоса / переход к хаосу, сопровождается изменением симметрии и параметров порядка (в аспекте положений современной статистической физики) траекторий динамических систем. В основе чего, в свою очередь, лежат те или иные бифуркационные механизмы, реализующиеся в динамических системах [6, 8].

В связи с вышеизложенным становится ясно, почему в настоящее время фокус множества исследований сместился в область совместного рассмотрения явлений бифуркаций в динамических системах, и феноменов ими порождаемых (или их сопровождающих): синхронизация, самоорганизация, управление хаосом. В данном контексте отметим следующие современные работы: [9] – авторы изучают бифуркации в системе глобально синхронизирующихся осцилляторов, при изменении фазового сдвига в связях между ними; [10] – авторы изучают вопросы самоорганизации (возникновение фазосинхронных кластеров) в системе слабосвязанных осцилляторов, динамика которых располагается на границе бифуркации Хопфа; [11] – авторы, на основе модели клеточного автомата типа Изинга, исследуют бифуркации и хаотические режимы в обществе по параметру «мнение», а управляющим параметром выступает образование связей между элементами сети; [12] – авторы, на примере системы связанных осцилляторов Ван дер Поля, исследуют бифуркационные механизмы формирования мультистабильности в динамике системы, эти механизмы позволяют описать эффекты синхронизации в достаточно широком классе взаимодействующих систем; [13] – авторы исследуют топологические и динамические свойства нейронной сети в зависимости от изменения двух параметров (синаптическая задержка и соотношение между потенцированием и депрессией), в работе показано формирование бистабильности в системе, переход между ветвями которой происходит через бифуркацию Хопфа, что оказывает прямое влияние на процессы обучения сети, её топологическое строение и когнитивные свойства.

Таким образом, анализ бифуркаций, протекающих в динамических системах, является одним из центральных вопросов нелинейной динамики и математического моделирования. На текущий момент теория бифуркаций хорошо развита, см. например [6]. Однако это настолько обширная и сложная тема, что она не может считаться методологически завершённой, и постоянно развивается, причём в двух направлениях. С одной стороны – адаптация известных бифуркационных механизмов, таких как бифуркации Хопфа, бифуркации удвоения периода, бифуркации вилки и т.п., для объяснения различных явлений демонстрируемых физическими, техническими, биофизическими и социальными системами. С другой – поиск новых видов бифуркационных перестроений аттракторов, не укладывающихся в означенные.

Одной из форм математического описания динамических систем являются дискретные отображения:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}), \quad (1.1)$$

где:  $\mathbf{s}$  – переменная состояния динамической системы,  $\mathbf{p}$  – вектор параметров отображения,  $k$  – дискретное время. Пусть также:  $N$  – размерность пространства состояний отображения,  $L$  – размерность пространства параметров отображения.

Заметим, что дискретные динамические системы в форме (1.1) являются таким

классом объектов, изучение свойств которых важно как с фундаментальной точки зрения, так и с прикладных позиций. Причём отображения (или иначе рекуррентные соотношения), применяются как для моделирования собственно динамики систем [3, 4, 14], так и в смежных вопросах, например: исследование характеристик магнитных решёток [15, 16]; анализ различных свойств квазикристаллов [17, 18]; изучение хаотизации параметров лучевых траекторий в неоднородных подводных звуковых каналах [19]; исследование динамики заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах [20].

Хорошо известно, что весьма мощным инструментом исследования рекуррентных соотношений, заданных в виде (1.1), являются методы символической динамики [1, 2, 21]. При этом возможности символического анализа полностью раскрываются на детерминированных системах вида (1.1), траектории которых демонстрируют аналогию со случайными процессами [8, 22, 23].

В настоящей статье для дискретных динамических систем определён новый класс бифуркаций и изложены методы их диагностики и анализа свойств. Введённые TQ-бифуркации реализуются в рекуррентных соотношениях и проявляются в виде качественного перестроения формы траекторий в расширенном пространстве состояний [24, 25]. В основе метода лежит формализм символического CTQ-анализа, предложенного автором в работах [26, 27] (аббревиатура CTQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: C, T и Q). Необходимо отметить, что символическая динамика, при всей своей кажущейся внешней простоте, является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [21] и позволяет исследовать такие сложные явления в системах как: хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость, и т.п. (см., например, [21–23] и приведённые там ссылки).

В качестве одного из изучаемых примеров, из методических соображений, выбрано логистическое отображение, являющееся эталонным объектом нелинейной динамики. С учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой системы распространяются на широкий класс как модельных так и реальных объектов. Второй пример посвящён исследованию так называемого «отображения следа», возникающего в задачах квантово-механического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решёток.

## 2. Символьное описание дискретных динамических систем

### 2.1. Определение T-алфавита

Свяжем с дискретной динамической системой 1.1 траекторию её эволюции, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда)  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ , где фазовая переменная  $\mathbf{s}$  системы имеет размерность  $N$ , а траектория состоит из  $K$  временных отсчётов. При этом каждому  $k$ -му отсчёту может быть сопоставлен момент времени  $t_k$ .

Определим исходное отображение, кодирующее, в терминах конечного T-алфавита [26, 27], форму  $n$ -й компоненты последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ :

$$\left\{ \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} \right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \quad T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]. \quad (2.1)$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов  $T_k^{\alpha\varphi}|_n$  для  $k$ -го отсчёта и  $n$ -й фазовой переменной, приведены на рисунке 1а.

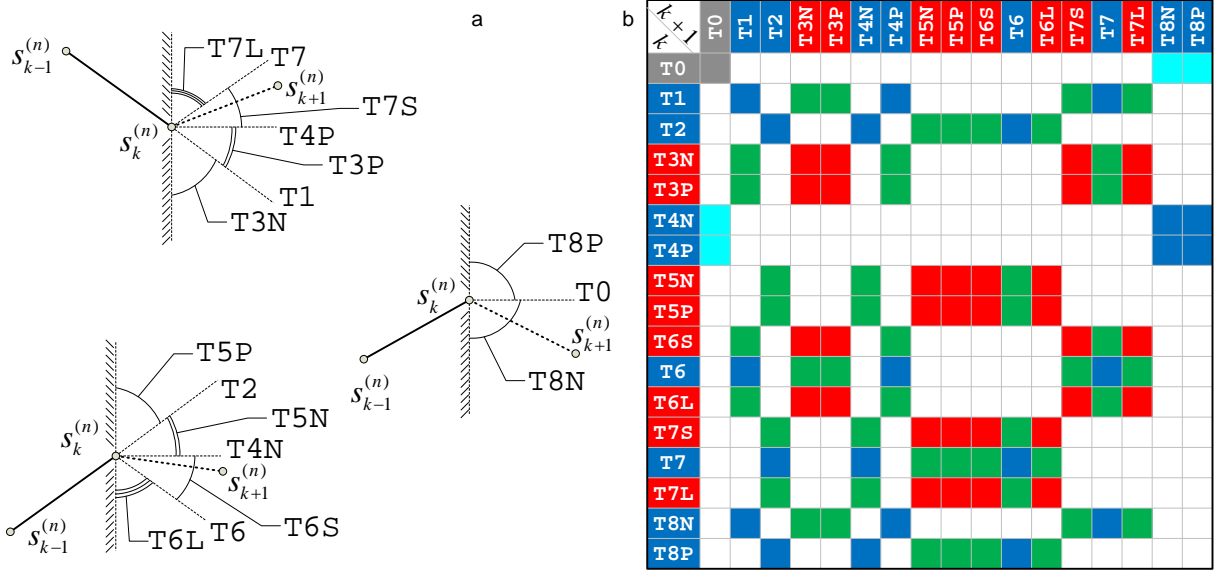


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие: (а) – геометрию символов  $T_k^{\alpha\varphi}|n$  для  $k$ -го отсчёта и  $n$ -й фазовой переменной; (б) – допустимые переходы между символами.

Строго, отображение (2.1) задаётся через соотношения:

$$\begin{aligned}
 T0 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ = 0, \\
 T1 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ < 0, \\
 T2 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ > 0, \\
 T3N & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
 T3P & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
 T4N & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
 T4P & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
 T5N & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
 T5P & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
 T6S & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
 T6 & \quad \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0, \\
 T6L & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
 T7S & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
 T7 & \quad \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0, \\
 T7L & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
 T8N & \quad \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ < 0, \\
 T8P & \quad \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ > 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь  $\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}$  и  $\Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}$ .

Таким образом, Т-алфавит включает в себя множество символов:

$$T_o^{\alpha\varphi} = \{T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, T5N, T5P, T6S, T6, T6L, T7S, T7, T7L, T8N, T8P\}. \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3) символ  $T_k^{\alpha\varphi}|n$  кодируется в виде  $Ti$ , где  $i$  – это правая часть кодов символов алфавита  $T_o^{\alpha\varphi}$ . В свою очередь, символ  $T_k^{\alpha\varphi}$  кодируется через  $Ti_1 \cdots i_N$ ,

см. (2.1). Полный алфавит  $T_o^{\alpha\varphi}|N$ , кодирующий форму траектории многомерной последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  в целом, состоит из  $17^N$  символов.

## 2.2. Определение Q-алфавита

Дополнительно к символам  $T_k^{\alpha\varphi}|n$  вводятся также символы  $Q_k^{\alpha\varphi}|n$ :

$$Q_k^{\alpha\varphi}|n \equiv T_k^{\alpha\varphi}|n \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}|n, \quad Q_k^{\alpha\varphi} = [Q_k^{\alpha\varphi}|1, \dots, Q_k^{\alpha\varphi}|n, \dots, Q_k^{\alpha\varphi}|N]. \quad (2.4)$$

Все допустимые переходы составляют множество символов алфавита  $Q_o^{\alpha\varphi} \ni Q_k^{\alpha\varphi}|n$ . Подмножества символов алфавита  $Q_o^{\alpha\varphi}$  отвечающие подалфавитам  $T_c^{\alpha\varphi}$ ,  $T_s^{\alpha\varphi}$  и  $T_0^{\alpha\varphi}$ , см. разбиение (3.7), обозначим через  $Q_c^{\alpha\varphi}$ ,  $Q_s^{\alpha\varphi}$  и  $Q_0^{\alpha\varphi}$ . Допустимые переходы обозначены на рисунке 1b.

Символ  $Q_k^{\alpha\varphi}|n$  кодируется через  $Qij$ , где  $i$  и  $j$  – это правые части кодов символов алфавита  $T_o^{\alpha\varphi}$  для  $k$  и  $k+1$  состояний, соответственно. В свою очередь, символ  $Q_k^{\alpha\varphi}$  кодируется через  $Q i_1 \dots i_n \dots i_N j_1 \dots j_n \dots j_N$ . Для полного алфавита  $Q_o^{\alpha\varphi}|N$ , кодирующего форму траектории последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  в целом, справедливо условие:  $|Q_o^{\alpha\varphi}|N| = 107^N$ .

## 3. TQ-бифуркации динамической системы

### 3.1. Общие положения

Сгруппируем последовательные итерации отображения:

$$\{\mathbf{s}, \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \mathbf{f}^2(\mathbf{s}, \mathbf{p})\} \rightarrow \{\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \mathbf{f}^2(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \mathbf{f}^3(\mathbf{s}, \mathbf{p})\}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{f}^w(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  – это композиция функций:

$$\mathbf{f}^w(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \mathbf{p}), \mathbf{p}), \quad \mathbf{f}^0(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{s}.$$

Исходя из (2.4) и (2.1), компоновка (3.1) однозначно определяет Q-символ, соответствующий состоянию  $\mathbf{s}$  динамической системы (1.1). Зафиксировав вектор параметров  $\mathbf{p}$  и варьируя переменную состояния  $\mathbf{s}$  отображения в пределах  $S_p^O$  – некоего множества состояний, возможно определить  $\langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_p^O$  – набор T- и Q-символов входящих в состав траекторий в данной области состояний динамической системы  $S_p^O$ , при данном векторе параметров  $\mathbf{p}$ . Тогда TQ-бифуркацию в системе (1.1) определим как изменение набора T- и Q-символов в области варьирования переменной состояния  $\mathbf{s}$ , отвечающее условию:

$$\langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_a^O \xrightarrow[\mathbf{p}=\mathbf{p}_b]{\text{TQ-bif}} \langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_b^O, \quad \langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_a^O \neq \langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_b^O, \quad \mathbf{p}_a \neq \mathbf{p}_b. \quad (3.2)$$

Причём  $\langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_a^O$  и  $\langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle_b^O$  – это наборы T- и Q-символов, входящие в состав траекторий до и после TQ-бифуркации, соответственно. А  $\mathbf{p}_b$  – это бифуркационное значение вектора параметров. По своей сути, TQ-бифуркации подразделяются на три рода (для иллюстрации см. рисунок 2a):

I – изменяется набор символов  $T^{\alpha\varphi}$ , набор символов  $Q^{\alpha\varphi}$  – переходов между неизменными символами  $T^{\alpha\varphi}$  остаётся неизменным.

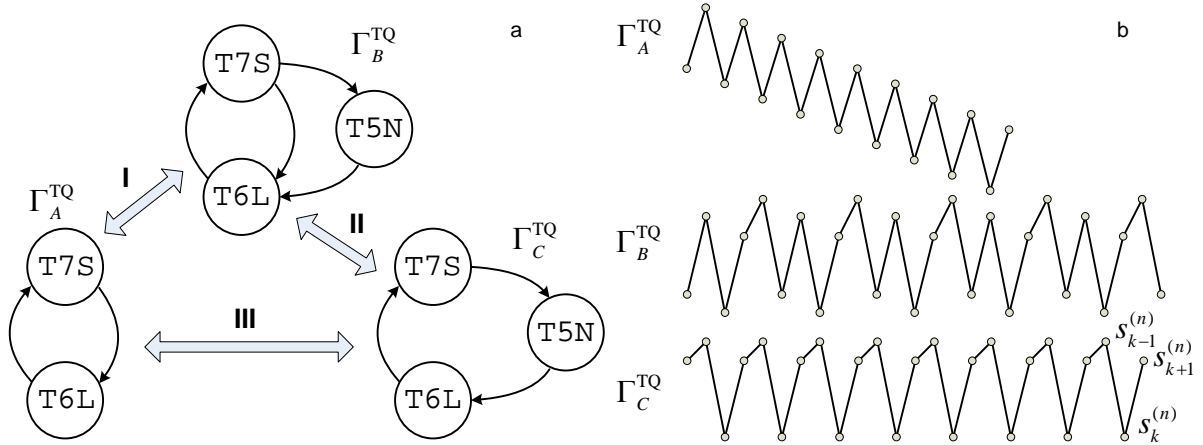


Рис. 2. (а) – иллюстрация сути трёх родов TQ-бифуркаций; (б) – варианты траекторий, соответствующих трём наборам T- и Q-символов.

II – набор символов  $T^{\alpha\varphi}$  остаётся постоянным, но изменяется набор символов  $Q^{\alpha\varphi}$ .

III – изменяется как набор символов  $T^{\alpha\varphi}$ , так и набор символов  $Q^{\alpha\varphi}$  – переходов между неизменными символами  $T^{\alpha\varphi}$ .

Как следует из вышеизложенного, TQ-бифуркации определяют области гомогенной динамики дискретной системы (1.1) в смысле символического СТQ-анализа, т.е. на уровне формы траектории динамической системы в расширенном пространстве состояний. Смысл этого высказывания иллюстрирует рисунок 2b, где в частности показан один из сценариев перехода между циклами периодов 3 –  $\Gamma_C^{TQ}$  и 5 –  $\Gamma_B^{TQ}$ , через TQ-бифуркацию II-рода.

Потенциально конструктивное применение разработанного подхода к анализу дискретных динамических систем возможно в контексте решения следующих проблем. Во-первых, это задача передачи и кодирования информации в хаотических системах, так как сложность траектории (аттрактора) – их близость к шумовым процессам, является принципиальным моментом для криптографических систем подобного рода. А сложность траектории напрямую связана с её формой [28], см. также раздел 4.1. Во-вторых, это управление хаотической динамикой и подавление хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий, ибо эффективность управления напрямую зависит от соотношения структуры аттрактора и управляющего воздействия [5, 14]. Отметим, что вопросы связанные с TQ-бифуркациями и управлением / подавлением хаоса являются предметом наших настоящих исследований.

Предложенный метод применим не только для систем эволюционирующих во времени. Изучение TQ-бифуркаций к примеру в контексте исследования различных решёточных моделей, задаваемых дискретными отображениями, позволяет получить ответы на ряд вопросов. Для случая магнитных решёток (когда фазовые переменные имеют смысл намагниченности на узел [15]) появляется возможность восстановления качественных свойств пространственного профиля намагниченности кристалла и анализа их изменений при варьировании параметров системы (подобную трактовку могут иметь траектории изображённые на рисунке 2b, если  $k$  принять за пространственный шаг решётки). При исследовании динамики заряженных частиц высоких энергий в изогнутых кристаллах [20] появляется возможность строгого анализа приращений угловых координат частиц при переходе от одной цепочки (решётки) атомов к другой в зависимости от направления кристаллографических осей, радиуса кривизны изгиба кристалла и иных параметров.

### 3.2. Анализ отображений

Далее рассмотрим вопросы вычисления  $\mathbf{p}_b$  – бифуркационного значения параметра, и анализа свойств отображений, связанных с TQ-бифуркациями.

Введём обозначения:

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{s}_y = \mathbf{f}^2(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{s}_z = \mathbf{f}^3(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \mathbf{f}^2(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (3.3)$$

Из (3.3) выделим для анализа  $n$ -ю фазовую переменную и полученные величины представим как Декартовы координаты точки в 3-х мерном пространстве:

$$s_x = \mathbf{s}_x^{(n)}, \quad s_y = \mathbf{s}_y^{(n)}, \quad s_z = \mathbf{s}_z^{(n)}, \quad P_{Q_s}^{(n)} = (s_x, s_y, s_z). \quad (3.4)$$

С учётом (3.1) несложно видеть, что точка  $P_{Q_s}^{(n)}$  определяет символ  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ , соответствующий состоянию  $\mathbf{s}$ . Так введём в рассмотрение плоскость  $F_T^{(n)}$ , на которой определим правую Декартову систему координат, и взаимно однозначно связанную с ней полярную:

$$F_T^{(n)} \subset \mathbb{R}^2 : (s_x, s_y) \Leftrightarrow (\phi_{s'}^T, r_{s'}^T), \quad (3.5)$$

где  $\phi_{s'}^T$  – полярный угол, а  $r_{s'}^T$  – радиус-вектор. Плоскость  $F_T^{(n)}$  возможно разметить таким образом, что каждая её точка будет однозначно отвечать единственному символу из алфавита  $T_o^{\alpha\varphi}$ . На рисунке 3а приведена область определения T-символов на плоскости  $F_T^{(n)}$ . Тогда отображение (2.1) переписется в виде:

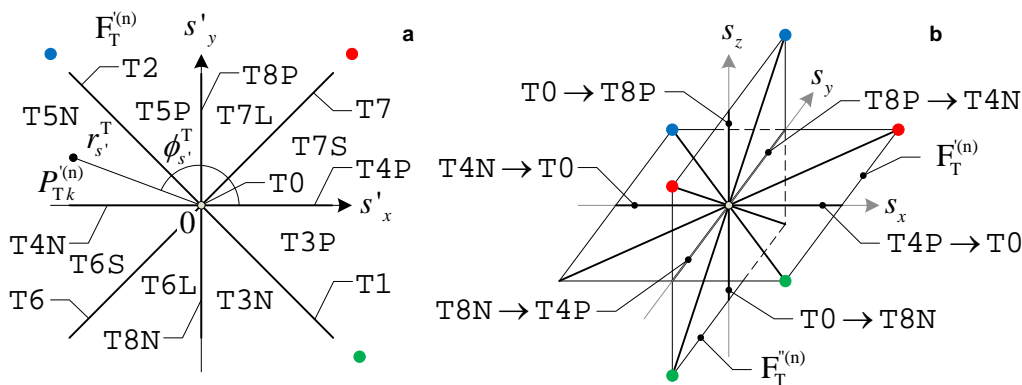


Рис. 3. Чертежи: (а) – разметка плоскости  $F_T^{(n)}$ ; (б) – разметка и ориентация плоскости  $F_T^{(n)}$ , схема формирования пространства  $P_{TQ}^{(n)}$ .

$$\begin{array}{ll}
\text{T0} & r_{s'}^{\text{T}} = 0, \\
\text{T1} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 7\phi', \\
\text{T2} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 3\phi', \\
\text{T3N} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (6, 7)\phi', \\
\text{T3P} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (7, 8)\phi', \\
\text{T4N} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 4\phi', \\
\text{T4P} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 0\phi', \\
\text{T5N} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (3, 4)\phi', \\
\text{T5P} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (2, 3)\phi', \\
\text{T6S} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (4, 5)\phi', \\
\text{T6} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 5\phi', \\
\text{T6L} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (5, 6)\phi', \\
\text{T7S} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (0, 1)\phi', \\
\text{T7} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 1\phi', \\
\text{T7L} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} \in (1, 2)\phi', \\
\text{T8N} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 6\phi', \\
\text{T8P} & r_{s'}^{\text{T}} > 0, \quad \phi_{s'}^{\text{T}} = 2\phi',
\end{array} \tag{3.6}$$

где  $\phi' = \frac{\pi}{4}$ . Идея отображения символов Т-алфавита на плоскость  $F_{\text{T}}'^{(n)}$  первоначально была предложена автором в докладе [29]. Как видно из (3.6) и рисунка 3а, все символы Т-алфавита  $\Gamma_o^{\alpha\varphi}$  однозначно разделяются, на три непересекающихся класса:

$$\Gamma_0^{\alpha\varphi} = \{\text{T0}\}, \tag{3.7a}$$

$$\Gamma_s^{\alpha\varphi} = \{\text{T1}, \text{T2}, \text{T4N}, \text{T4P}, \text{T6}, \text{T7}, \text{T8N}, \text{T8P}\}, \tag{3.7б}$$

$$\Gamma_c^{\alpha\varphi} = \{\text{T3N}, \text{T3P}, \text{T5N}, \text{T5P}, \text{T6S}, \text{T6L}, \text{T7S}, \text{T7L}\}. \tag{3.7в}$$

Отметим, что разбиение (3.7) имеет строгое обоснование через размерность Хаусдорфа [30] областей на плоскости  $F_{\text{T}}'^{(n)}$  занимаемых этими символами.

Дополнительно к плоскости  $F_{\text{T}}'^{(n)}$  введём плоскость  $F_{\text{T}}''^{(n)}$  отвечающую символу  $T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n$ , на которой также определим правую Декартову систему координат и взаимно однозначно связанную с ней полярную:

$$F_{\text{T}}''^{(n)} \subset \mathbb{R}^2 : (s_y, s_z) \Leftrightarrow (\phi_{s''}^{\text{T}}, r_{s''}^{\text{T}}). \tag{3.8}$$

Правила разметки этой плоскости аналогичны таковым для  $F_{\text{T}}'^{(n)}$ , но зеркально отражённой по оси  $s_y$ , см. рисунок 3б.

Анализ дискретного отображения вида (1.1) через представление в координатах изображающей точки  $P_{\text{Qs}}^{(n)}$  позволяет однозначно и во взаимосвязи идентифицировать различные его свойства. В том числе неподвижные точки отображения, циклы периода два, и циклы периода три, соответственно:

$$s_x = s_y = s_z = 0, \tag{3.9a}$$

$$s_x = s_y = -s_z \neq 0, \tag{3.9б}$$

$$-s_x + s_y + s_z = 0, s_x \neq 0, s_y \neq 0, s_z \neq 0. \tag{3.9в}$$



Отметим, что (3.9) задаёт соответственно уравнения: точки; прямой с выколотой точкой; плоскости с выколотой точкой и разрезанной 3-мя плоскостями. Для понимания сути (3.9) заметим, что координаты  $s_x$ ,  $s_y$  и  $s_z$  с точностью до знака представляют собой приращения  $n$ -й фазовой переменной отображения  $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  при последовательных его итерациях.

Элементарно также обнаруживаются T- и Q-символы, например условия для символов T5P и Q5P6L записываются следующим образом (для справки см. рисунок 3):

$$s_x < 0, s_y > 0, -s_x < s_y, \quad (3.10a)$$

$$s_x < 0, s_y > 0, s_z < 0, -s_x < s_y, -s_z < s_y. \quad (3.10b)$$

В (3.9) и (3.10), задавая  $S_o$  – область определения фазовой переменной  $\mathbf{s}$ , возможно как управлять получаемыми решениями, так и определять область изменения вектора параметров  $\mathbf{p}$  в которых эти решения существуют. Таким образом, систематический анализ отображения, в части T- и Q-символов, позволяет обнаружить и классифицировать TQ-бифуркации реализующиеся в нём.

Следует отметить два ключевых момента в контексте данного анализа. Во-первых, идентификация во взаимосвязи: неподвижных точек отображения, циклов периода два, циклов периода три и TQ-бифуркаций, с учётом положений теоремы Шарковского [2], позволяют проводить комплексный анализ системы на предмет свойств хаоса. Во-вторых, подобный анализ, в силу формы базовых выражений, удобно проводить в современных системах компьютерной алгебры (которые де-факто стали стандартным инструментом для большинства физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов). Это позволяет существенно экономить время и избегать многих рутинных ошибок.

## 4. Примеры

С целью сделать восприятие вышеизложенной методики обнаружения TQ-бифуркаций в дискретных отображениях более доступным, при построении примеров использовались два непринципиальных упрощения: (i) – TQ-бифуркации анализировались только для подмножества символов  $T_c^{\alpha\varphi}$ , см. (3.7); (ii) – при анализе, TQ-бифуркации строились по внешней оболочке аттрактора (притягивающего множества) [1, 5], внутренняя структура самого аттрактора и внешние по отношению к нему области – не рассматривались. Первое ограничение никак не влияет на анализ основных (наиболее вероятных) траекторий располагающихся в зоне аттрактора, а затрагивает только сепаратрисы (точки равновесия). Оно является чисто техническим и легко снимается посредством расширения анализа на весь T-алфавит, см. (2.3). Второе ограничение сводится к тому, что анализируются вкупе как траектории собственно аттрактора, так и переходные траектории располагающиеся непосредственно внутри его внешних границ. Тем не менее оно никак не влияет на полученные результаты: что при том или ином значении вектора управляющих параметров, аттрактор принципиально не может содержать те или иные T- и/или Q-символы. Естественно, что и второе упрощение возможно снять, но для этого потребуется информация о детальной структуре аттрактора.

#### 4.1. Логистическое отображение

Для демонстрации сути ТQ-бифуркаций рассмотрим логистическое отображение, которое является эталонной моделью нелинейной динамики:

$$s_{k+1} = f(s_k, \lambda) = 4\lambda s_k(1 - s_k), \quad (4.1)$$

где:  $\lambda \in (0, 1]$  – управляющий параметр,  $s \in (0, 1)$  – фазовая переменная системы. Методическое значение этого осциллятора обусловлено тем, что при относительной простоте, логистическое отображение порождает широкий спектр сложных, в том числе и хаотических колебательных режимов [27, 31]. Переход к которым, осуществляется через классический сценарий удвоения периода. А с учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных физических, биофизических, химических и других систем, что обуславливает к логистическому отображению и прикладной интерес [31, 32].

Известно, что за предельной точкой удвоений периода  $\lambda_\infty = 0.892486418\dots$  структура динамики (4.1) необычайно богата (см. рисунок 4а): хаотические режимы сменяются циклами различных периодов, которые в свою очередь вновь превращаются в хаос; выделяется также значение  $\lambda_{3c} = 1/4 + 1/\sqrt{2}$ , которое соответствует точке касательной бифуркации (переход к хаосу через перемежаемость). Относительно хаотических режимов, как правило, делается один вывод: с увеличением  $\lambda$  степень хаотичности растёт, достигая максимальной величины при  $\lambda = 1$ . Данный вывод делается на основе анализа показателя Ляпунова, см. рисунок 4б.

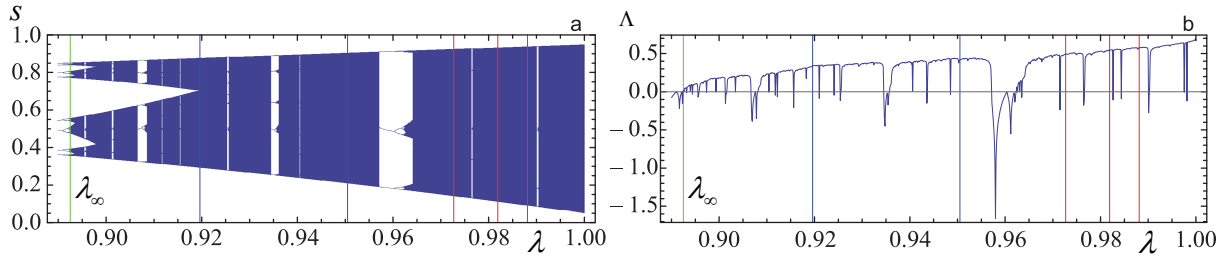


Рис. 4. Логистическое отображение: (а) – бифуркационная диаграмма; (б) – показатель Ляпунова  $\Lambda$ .

Анализ отображения (4.1) на основе описанной в статье техники, позволяет расширить наши представления о качественном характере колебаний за предельной точкой удвоений периода  $\lambda_\infty$ . Оказывается, что логистический осциллятор в пределах внешней оболочки аттрактора:

$$f(\lambda, \lambda) \leq s_k \leq \lambda, \quad (4.2)$$

испытывает целый каскад ТQ-бифуркаций I и II родов (в контексте подмножества символов  $T_c^{\alpha\varphi}$ ), которые существенно расширяют допустимые формы траекторий с увеличением параметра  $\lambda$ , см. рисунок 5.

На интервале

$$\lambda_\infty \leq \lambda \leq \lambda_{\text{Т5N}}, \quad \lambda_{\text{Т5N}} = 0.9196433776070805\dots, \quad (4.3)$$

$$\lambda_{\text{Т5N}} = \frac{1}{6} [1 + d_1 + d_2], \quad d_1 = (19 - 3\sqrt{33})^{1/3}, \quad d_2 = (19 + 3\sqrt{33})^{1/3},$$

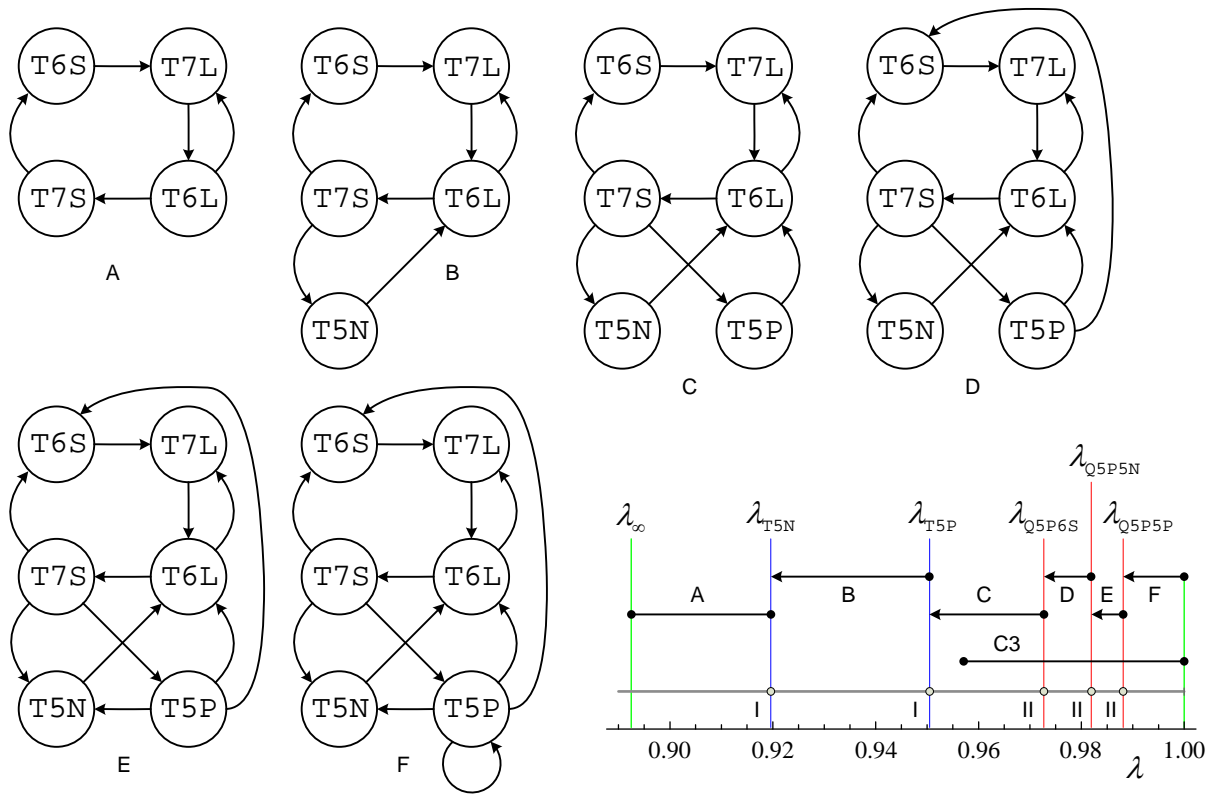


Рис. 5. Диаграмма TQ-бифуркаций логистического отображения справа от точки  $\lambda_\infty$ . При обозначении интервалов А–F и С3 – точка и стрелка имеют смысл соответственно равенства и стремления параметра  $\lambda$  к тому или иному граничному значению.

траектории относятся к типу А. На интервале

$$\lambda_{T5N} < \lambda \leq \lambda_{T5P}, \quad \lambda_{T5P} = 0.9505328097413777 \dots,$$

$$\lambda_{T5P} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{3} + c + \sqrt{6\sqrt{3}c^{-1} - c^2 - 3} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.4)$$

$$a = \left( \frac{2}{11 + 3\sqrt{69}} \right)^{1/3}, \quad b = 2^{2/3} (11 + 3\sqrt{69})^{1/3}, \quad c = \sqrt{b - 10a - 1},$$

траектории относятся к типу В. На интервале

$$\lambda_{T5P} < \lambda \leq \lambda_{Q5P6S}, \quad \lambda_{Q5P6S} = 0.9727182637816345 \dots,$$

$$\lambda_{Q5P6S} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{4}{3} (1 + 4d_1^{-1} + d_1) \right]^{1/2}, \quad (4.5)$$

траектории относятся к типу С. В пределах этого интервала при  $\lambda = \lambda_{3c}$  впервые возникают траектории имеющие минимальный цикл периода 3, которые существуют вплоть до  $\lambda = 1$ , см. интервал С3 на диаграмме на рисунке 5. На интервале

$$\lambda_{Q5P6S} < \lambda \leq \lambda_{Q5P5N}, \quad \lambda_{Q5P5N} = 0.9819342504466879 \dots, \quad (4.6)$$

траектории относятся к типу D. Точка  $\lambda_{Q5P6S}$  есть один из корней полиномиального уравнения:

$$128 \lambda^7 - 192 \lambda^6 + 32 \lambda^5 + 48 \lambda^4 - 8 \lambda^3 - 4 \lambda^2 - 2 \lambda - 1 = 0. \quad (4.7)$$

На интервале

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Q5P5N}} < \lambda \leq \lambda_{\text{Q5P5P}}, \quad \lambda_{\text{Q5P5P}} = 0.9880824702836961\dots, \\ \lambda_{\text{Q5P5P}} = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + 8 R_1} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

траектории относятся к типу E. Точка  $R_1$  есть один из корней полиномиального уравнения:

$$256 \lambda^8 - 512 \lambda^7 + 384 \lambda^6 - 192 \lambda^5 + 96 \lambda^4 - 32 \lambda^3 + 8 \lambda^2 - 4 \lambda - 1 = 0. \quad (4.9)$$

Окончательное усложнение траекторий внутри аттрактора происходит на интервале  $\lambda_{\text{Q5P5P}} < \lambda \leq 1$ , на котором траектории относятся к типу F.

Из представленных результатов следует, что с увеличением  $\lambda$  усложняется структура аттрактора, и при этом растёт качественная сложность формы траекторий колебаний, в том числе и в хаотических режимах. Примечательно, что хаотические режимы впервые возникают при  $\lambda = \lambda_\infty$ , но вплоть до  $\lambda = \lambda_{\text{T5N}}$  траектории имеют весьма вырожденную форму в виде набора простых треугольных импульсов различной амплитуды, и только к  $\lambda > \lambda_{\text{Q5P5P}}$  форма колебаний становится достаточно «запутанной». Тем не менее, колебания логистического осциллятора даже в режиме развитого хаоса являются вырожденными относительно истинно стохастического процесса [5]: сравните структуру траекторий типа F (см. рисунок 5) и потенциально допустимый набор T-символов и переходов между ними (см. рисунок 1b).

## 4.2. Отображение следа

При теоретическом исследовании различных решёточных моделей в статистической физике зачастую возникают дискретные отображения вида (1.1) [33]. Так приближение Бете-Пайерлса и метод рекуррентных соотношений [15, 16], позволяют свести изучение свойств фазовых переходов и критических явлений в системах к изучению поведения отображений вида (1.1). В свою очередь, квантово-механическое приближение, при изучении различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решёток, порождает потребность в анализе свойств и решении дискретных аналогов уравнения Шрёдингера. Популярный подход к этой задаче предполагает порождение так называемых «отображений следа» («trace map») [17, 18]. Некоторые из них топологически сопряжены с однопараметрическим отображением на плоскости:

$$F_\mu : \quad x_{k+1} = x_k y_k, \quad y_{k+1} = (x_k - \mu)^2, \quad (4.10)$$

где:  $\mu \in [0, 2]$  – управляющий параметр,  $x, y \in [0, 4]$  – фазовые переменные системы. Исследование характеристик «отображений следа» важно тем, что последовательность величин  $x_k, y_k$  определяет в итоге свойства исследуемого кристалла: является ли он проводником или изолятором, отражает или поглощает излучение, и т.п. Помимо этого, исследование отображения (4.10) представляет интерес и с позиций нелинейной динамики и теории хаоса [34].

Анализ системы (4.10) на основе предложенной в работе техники, позволяет дополнить уже известные результаты по изучению этой системы, см. например [35] и приведённые там ссылки. Как показал анализ отображения (4.10), его траектории в пределах внешней оболочки аттрактора:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 4, \quad (4.11)$$

по обоим фазовым переменным при всех значениях  $\mu$  могут содержать полный набор T-символов. Тем не менее, при изменении значений управляющего параметра в системе происходят совместные по обоим фазовым переменным TQ-бифуркации I-рода. На рисунке 6а приведена матрица интервалов параметра  $\mu$ , для существования тех или иных пар символов. Численные значения интервалов приведены в (4.12).

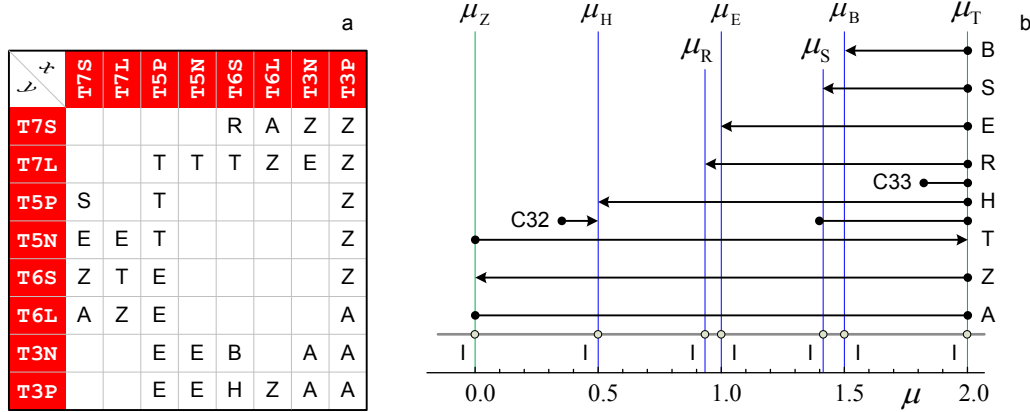


Рис. 6. Отображение (4.10): (а) – интервалы существования символов; (б) – диаграмма TQ-бифуркаций.

$$\begin{aligned}
 A : 0 \leq \mu \leq 2, & \quad T : 0 \leq \mu < 2, & Z : 0 < \mu \leq 2, & \quad H : 1/2 < \mu \leq 2, \\
 R : \mu_R < \mu \leq 2, & \quad E : 1 < \mu \leq 2, & S : \sqrt{2} < \mu \leq 2, & \quad B : 3/2 < \mu \leq 2,
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

где точка  $\mu_R = 0.9344372418274018 \dots$  есть один из корней полиномиального уравнения:

$$2\mu^5 - 16\mu^4 + 42\mu^3 - 31\mu^2 - 24\mu + 26 = 0.
 \tag{4.13}$$

Отметим, что исследование отображения (4.10 на предмет наличия TQ-бифуркаций II- и III-родов – это предмет наших будущих исследований.

Дополнительный анализ также показал, что одномоментное по переменным  $x$  и  $y$  существование циклов периода 2 в системе невозможно. Но, одномоментные циклы периода 3 (CP33) существуют в системе, в диапазоне значений управляющего параметра

$$\mu_{33} \leq \mu \leq 2, \quad \mu_{33} = 1.8231182874599805 \dots,
 \tag{4.14}$$

точка  $\mu_{33}$  есть один из корней полиномиального уравнения:

$$\mu^{11} - \mu^{10} - 12\mu^9 + \mu^8 + 39\mu^7 + 51\mu^6 - 62\mu^5 - 160\mu^4 + 120\mu^3 + 160\mu^2 - 512 = 0.
 \tag{4.15}$$

В диапазоне значений параметра  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
 \mu_{32}^1 \leq \mu < \frac{1}{2}, & \quad \mu_{32}^1 = 0.3533904552829103 \dots, \\
 \mu_{32}^2 \leq \mu \leq 2, & \quad \mu_{32}^2 = 1.398425762651376 \dots,
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

существует также несимметричная одномоментная комбинация циклов (CP32), а именно: по переменной  $x$  – цикл периода 3, по  $y$  – цикл периода 2. Точки  $\mu_{32}^1$  и  $\mu_{32}^2$  есть корни полиномиальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \mu^5 - 4\mu^4 + 5\mu^3 + 2\mu^2 - 4\mu + 1 &= 0, \\
 \mu^5 - 2\mu^4 - 3\mu^3 + 2\mu^2 + 4\mu + 1 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Из полученных результатов в том числе следует, что траектории невозмущённого отображения ( $\mu = 0$ ) в пределах аттрактора могут содержать только парные Т-символы входящие в интервалы А и Т. В тоже время траектории классического «отображения следа» ( $\mu = 2$ ), более сложно устроены: они не могут содержать парные Т-символы входящие в интервал Т, но могут иметь множество других комбинаций парных Т-символов, а также иметь циклы С32 и С33.

## 5. Заключение

Итак, в настоящей работе введён новый класс бифуркаций в дискретных динамических системах. Так называемые ТQ-бифуркации, которые реализуются в дискретных отображениях, связаны с качественным перестроением формы траекторий в расширенном пространстве состояний. Изложены также методы диагностики ТQ-бифуркаций и анализа их свойств. В основе подхода лежит формализм символического СТQ-анализа, предложенного автором в работах [26, 27].

Потенциально конструктивное применение разработанного подхода к анализу дискретных динамических систем возможно в контексте решения различных физических проблем, например: передача и кодирование информации в хаотических системах; управление хаотической динамикой и подавление хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий; анализ физических свойств дискретных решёток, например магнитных; изучение динамики заряженных частиц высоких энергий в изогнутых кристаллах. Естественно, что область применения ТQ-бифуркаций в дискретных динамических системах не ограничивается только физикой, и может быть расширена на любые научно-технические задачи, оперирующие дискретными отображениями.

В рамках демонстрации основных возможностей инструментария проведён анализ логистического отображения в области расположенной справа от предельной точки удвоений периода. Эта система является эталонной моделью нелинейной динамики. Кроме того, с учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой модели распространяются на широкий класс как теоретических так и реальных объектов [31, 32]. Проведённый анализ показал, что с увеличением  $\lambda$  усложняется структура аттрактора, и при этом растёт качественная сложность формы траекторий колебаний, в том числе и в хаотических режимах. Найдены пять критических значений параметра  $\lambda$ , при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траекторий логистического отображения.

Дополнительно также проведено исследование так называемого «отображения следа», возникающего в задачах квантово-механического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решёток [17, 18]. Полученные результаты позволили расширить уже известные представления об этой системе, см. например [35].

В заключение следует отметить, что предложенные сценарии перестройки геометрической структуры траекторий дискретных отображений ни в коем случае не являются заменой типовым сценариям разрушения хаоса / перехода к хаосу и классическим бифуркационным механизмам в динамических системах [1, 6–8]. Напротив, анализ ТQ-бифуркаций органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на анализируемую систему с несколько иной точки зрения – с точки зрения геометрии её траектории в расширенном пространстве состояний.

## Список литературы

1. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск. ИКИ (2002).
2. А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. Пер. с англ. под ред. А. С. Городецкого. Москва. МЦНМО (2005).
3. С. П. Кузнецов. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН **181**: 2. 121 (2011).
4. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Г. А. Окрокверцхов, Г. И. Стрелкова. Статистические свойства динамического хаоса. УФН **175**: 2. 163 (2005).
5. А. Ю. Лоскутов. Очарование хаоса. УФН **180**: 12. 1305 (2010).
6. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников. Теория бифуркаций, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Москва. ВИНТИ (1986), том 5.
7. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Т. II. Ижевск. РХД (2009).
8. R. Gilmore, M. Lefranc. The topology of chaos. New York. Wiley-Interscience (2002).
9. O. Burylko, Y. Kazanovich R. Borisjuk. Phys. Rev. E **90**: 2, 022911 (2014).
10. H. Kori, Y. Kuramoto, S. Jain, I. Z. Kiss, J. L. Hudson. Phys. Rev. E **89**: 6, 062906 (2014).
11. F. Bagnoli, R. Rechtman. Phys. Rev. E **88**: 6, 062914 (2013).
12. S. Astakhov, N. Fujiwara, A. Gulay, N. Tsukamoto, J. Kurths. Phys. Rev. E **88**: 3, 032908 (2013).
13. Q. Ren, K. M. Kolwankar, A. Samal, J. Jost. Phys. Rev. E **86**: 5, 056103 (2012).
14. А. Ю. Лоскутов, А. В. Попкова. Письма в ЖЭТФ **94**: 1, 86 (2011).
15. Н. С. Ананикян, Л. Н. Ананикян, Л. А. Чалмазчян. Письма в ЖЭТФ **94**: 1, 40 (2011).
16. J. L. Monroe. J. Stat. Phys. **65**: 1/2, 255 (1991).
17. A. Romanelli. Physica A **388**: 18, 3985 (2009).
18. Eds. D. Damanik, A. Gorodetski. Mini-Workshop: Dynamics of Trace Maps and Applications to Spectral Theory. Oberwolfach Report 03/2011. Oberwolfach (2001).
19. А. Л. Вировлянский, Д. В. Макаров, С. В. Пранц. УФН **182**: 1, 19 (2012).
20. А. И. Ахмезер, Н. Ф. Шульга, В. И. Трутень, А. А. Гриненко, В. В. Сыщенко. УФН **165**: 10, 1165 (1995).
21. Р. Боуэн. Методы символической динамики. Москва. Мир (1979).
22. C. S. Hsu. Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems. New York. Springer-Verlag (1987).
23. M. Dellnitz, A. Hohmann. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. Numerische Mathematik **75**: 3. 293 (1997).
24. A. V. Makarenko. The possibilities by symbolic analysis in velocity-curvature space: TQ-bifurcation, symmetry, synchronization. School-Seminar «Interaction of Mathematics and Physics: New Perspectives», Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow (2012).
25. А. В. Макаренко, Наноструктуры. Матем. физика и модел. **8**: 2, 21 (2013).
26. А. В. Макаренко, Письма в ЖТФ. **38**: 4, 1 (2012).
27. А. В. Макаренко, Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **52**: 7, 1248 (2012).
28. A. V. Makarenko, IFAC-PapersOnLine **48**: 11, 1049 (2015); arXiv:1506.09103.
29. А. В. Макаренко. Исследование дискретных отображений в терминах символического СТQ-анализа. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF). Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. С. 108–109. Москва (2014).
30. В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерности. Москва. Гос. изд-во Иностранной литературы (1948).

31. *E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov*, Chaotic synchronization: Applications to living systems. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 42.) River Edge, N.J.: World Sci. Publ. (2002).
32. *М. Фейгенбаум*, УФН **141**: 2, 343 (1983).
33. *Р. Бэкстер*. Точно решаемые модели в статистической механике. Москва. Мир (1985).
34. *A. N. Sharkovskii*, Problem list, Int. Conf. «Low Dimensional Dynamics», Oberwolfach, Germany, April 25–May 1 1993 (Tagungsbericht 20, 1993), p. 17.
35. *S. S. Belmesova, L. S. Efremova, D. Fournier-Prunaret*, Invariant Curves of Quadratic Maps of the Plane from the One-Parameter Family Containing the Trace Map, ESAIM: Proceedings and Surveys **46**, 98 (2014).

Макаренко Андрей Викторович,  
канд. техн. наук,  
рук. научно-исследовательской группы  
«Конструктивная Кибернетика»,  
e-mail: avm.scince@mail.ru

Подписано 03 января 2016 г.