

# АППРОКСИМАЦИОННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ГОРИЗОНТА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ С ОБОСТРЕНИЕМ

А. В. Макаренко<sup>1 2</sup>

Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»,  
Москва, Россия<sup>1</sup>

Институт проблем управления РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>

Режим с обострением (blow-up mode) позволяет приближённо моделировать асимптотику многих процессов порождаемых динамическими системами с сильной положительной обратной связью. Такой тип систем типичен для различного рода задач: теории горения и взрыва, физики плазмы и гидродинамики, химической кинетики и биофизики, экономических кризисов и социальной самоорганизации. Подобного рода модели являются нелинейными, зачастую многомерными и, как правило, обладают сложным поведением. В них автоматически формируется конечный горизонт предсказуемости.

В докладе автора [1] введена в рассмотрение простая динамическая система, со свободным (управляющим) параметром  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ :

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_0 (\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_0 = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2}.$$

В докладе автора [2] показано, что в отличие от других простейших многомерных систем с режимом обострения, система (1) аналитически решается и обладает рядом других положительных качеств. Тем не менее остался незакрытым вопрос о вероятностных свойствах горизонта предсказуемости  $\tau_{imp}$  формируемой моделью (1).

Промежуток времени между  $t_0$  и моментом выброса траектории ( $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ ) определяется выражением [2]:

$$(2) \quad \tau_{imp} = \frac{\arccos u}{|\mathbf{f}_0| \sqrt{\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2} \sqrt{1 - u^2}}, \quad u = \frac{|\dot{\mathbf{r}}_0|}{\sqrt{\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2}} \cos \gamma_0,$$

где  $\gamma_0$  – угол между векторами  $\dot{\mathbf{r}}_0$  и  $\ddot{\mathbf{r}}_0$ . Принимая во внимание, что функция  $\tau_{imp}(\gamma_0)$  – монотонная и неубывающая, плотность вероятности для  $\tau_{imp}$  в общем виде запишется:

$$(3) \quad p_\tau(\tau_{imp}) = \begin{cases} p_\gamma[\gamma(\tau_{imp})] \frac{d\gamma(\tau_{imp})}{d\tau_{imp}} & \tau_{imp} \in [\tau_{imp}^0, \tau_{imp}^\pi]; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases},$$

где  $\tau_{imp}^0 = \tau_{imp}(\gamma_0 = 0)$ ,  $\tau_{imp}^\pi = \tau_{imp}(\gamma_0 = \pi)$ . Таким образом, для выражения (3) в явном виде, как следует из (2), мешает проблема обратимости функции:  $v(u) = \frac{\arccos u}{\sqrt{1-u^2}}$ . В данной работе предложена её аппроксимация в виде:

$$(4) \quad \tilde{v}(u) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(u+c')}{a'} - b' \right), \quad \tilde{u}(v) = \frac{a'}{\pi} \operatorname{arccctg}(\pi v + b') - c',$$

где коэффициенты  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  находятся из решения системы (4) в трёх опорных точках  $u(\gamma_0)$ :

$$(5) \quad u(0) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}_0|^2}{\sqrt{\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2}}, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad u(\pi) = -\frac{|\dot{\mathbf{r}}_0|^2}{\sqrt{\lambda + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2}}.$$

Подобная аппроксимация обладает малой ошибкой при  $|\dot{\mathbf{r}}_0| < \lambda$ .

Изучены характеристики  $\tau_{hp}$  для случая полной априорной неопределённости, когда  $\gamma_0$  имеет равномерное распределение на  $[0, \pi]$ .

### Список литературы

1. *Макаренко А.В.* Анализ предсказуемости состояний многомерных динамических систем // Тезисы докладов 11-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, 2010, С. 249–251.
2. *Макаренко А.В.* Оценка снизу на горизонт предсказуемости состояний динамических систем с  $C^1$  – гладкими траекториями // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2010, С. 122–123.

### THE APPROXIMATION ANALYTICAL ESTIMATION OF HORIZON PREDICTABILITY IN A SIMPLE MODEL BLOW-UP MODE

A. V. Makarenko<sup>1 2</sup>

Constructive Cybernetics Research Group, Moscow, Russia<sup>1</sup>  
Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia<sup>2</sup>

In this paper we study a simple multidimensional model with blow-up mode. The obtain an analytic approximation for the horizon of predictability. We studies it the probability properties in the case of full a priori uncertainty.