

УДК: 51-7, 519.6, 519.217, 530.182;
MSC: 37M10, 37M20, 34C28, 34C15, 34D06;
PACS: 02.70.-c, 05.45.-a, 05.45.Tr, 05.45.Xt.

Исследование временной структуры синхронизации в многомерных хаотических системах

А. В. Макаренко^{a, b, 1}

^a Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»
Россия, 101000, Москва, а/я 560, Web: www.rdcn.ru

^b Институт проблем Управления РАН
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

Предложен новый подход к комплексному исследованию временной структуры синхронизации многомерных хаотических систем. Метод позволяет диагностировать и количественно оценивать характеристики перемежаемости при синхронизации хаотических колебаний в режиме T-синхронизации. Проведено изучение системы двух идентичных логистических отображений с однонаправленной связью, функционирующих в режиме развитого хаоса. Показано, что широко распространённый подход, при котором анализу подвергаются только паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал и из анализа исключаются – следует признать методологически неполным.

Ключевые слова: хаос, T-синхронизация, перемежаемость, временная структура, паттерны синхронизации, зоны десинхронизации.

1. Введение

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространён в природе, науке, технике и в обществе [1]. Одно из важных проявлений этого явления – это синхронизация хаотических колебаний, которая экспериментально наблюдалась в различных физических приложениях (см. [1–5] и приведённые там ссылки): радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного эффекта является весьма важным также с точки зрения его применения к передаче информации [6] и к криптографическому шифрованию [7] с помощью детерминированных хаотических колебаний, к квантовым вычислениям [3, 8].

Синхронизация хаотических колебаний объединяет под собой несколько различных видов [2]: обобщённая [9], полная [10], противофазная [11], с запаздыванием [12], частотная [13], фазовая [14], синхронизация временных масштабов [15]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее, продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны – на

¹E-mail: avm.science@mail.ru

рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а с другой – на поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные. Несмотря на продолжительную историю изучения синхронизации хаотических колебаний, множество важных вопросов в данной области остаются нерешёнными. В их числе и количественное исследование временной структуры синхронизации динамических систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16].

Понятие перемежаемости является весьма важным в физике (и не только), для исследования структурных свойств процессов, и оно не ограничивается только синхронизмом хаотических систем. На это в своё время обратил внимание ещё Б.Б. Мандельброт [17] (задача о турбулентных течениях в гидродинамике), а также несколько позже Я.Б. Зельдович с соавторами [16] (задачи химической кинетики и самовозбуждения магнитного поля в случайном потоке проводящей жидкости). Так явление перемежаемости имеет приложение в физике частиц высоких энергий [18], космологии [19], при исследовании перестроек аттракторов нелинейных динамических систем [20–22], и в прочих областях. С физической точки зрения перемежаемость вообще означает появление неких структур различного масштаба в среде (например вихрей, локализованных деформаций, температурных неоднородностей), которая исходно могла быть совершенно бесструктурной на этих масштабах. С математической точки зрения такое поведение характеризуется наличием редких, но сильных пиков в поведении индикатора структуры – некоей случайной величины [16].

Исследование структуры синхронизма имеет как теоретическую значимость для самой нелинейной динамики [20], так и прикладное значение, например, в вопросах биологии и медицины [23–25], стохастической финансовой математики [26] и т.д. Работа [27] по анализу «пузырящегося поведения» (bubbling phenomenon) является одной из первых, в которой была экспериментально зафиксирована перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением в системе связанных осцилляторов. Но при анализе этого явления, временная структура синхронизма, как таковая, не исследовалась. Со временем интерес исследователей к структурным феноменам, возникающим при синхронизации хаоса неуклонно возрастал. В настоящее время вопросы временной, пространственной и пространственно-временной структуры синхронизма, активно исследуются как с теоретических (модельных) представлений [28–31], так и с позиций прикладных аспектов, например нейрофизиологии (нейробиологии) [23, 32], энергетических сетей [33].

При всей актуальности проблематики количественного исследования временной структуры синхронизации нелинейных систем, продвижение по этому вопросу, тем не менее, весьма отстаёт от исследования чисто пространственных паттернов синхронизации в распределённых системах. Это наглядно иллюстрируется цитированными выше работами [23, 28–33]. В числе основных причин, по мнению автора, лежат две объективные трудности. Во-первых, это отсутствие единой и полной теории нелинейных динамических систем [20]. Во-вторых, при исследовании пространственных паттернов возможно широко применять как аппарат теории сетей [34], так и аппарат теории распознавания образов на изображениях (дву- и трёхмерных скалярных полях физических величин). В свою очередь, при анализе временной или пространственно-временной структуры, существует проблема перехода от временных рядов фазовых переменных к графам или образам, характеризующим перемежаемость процесса синхронизации. Не в последнюю очередь это вызвано неразвитостью соответствующего инструментария, ибо исследователи в основном оперировали и продолжают оперировать так называемые

мым интегральным коэффициентом синхронности – изучая параметры синхронизации в «среднем». Соответственно, измерительные меры разрабатывались, как правило, под эту же концепцию. Заметим, что парадигма изучения систем и процессов «в среднем» широко закрепились во многих экспериментальных науках. Причины распространения подобного подхода и его фундаментальные ограничения подробно изложены к примеру в обзоре [16].

В настоящей статье развивается оригинальный метод диагностики и количественного измерения характеристик режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем, направленный на комплексное изучение временной структуры синхронизма через исследование так называемой Т-синхронизации [35–37]. В основе метода лежит формализм символического СТQ-анализа, предложенного автором в работах [38, 39] (аббревиатура СТQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: С, Т и Q). Необходимо отметить, что символическая динамика, при всей своей кажущейся внешней простоте, является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [40] и позволяет исследовать такие сложные явления в системах как: хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость, и т.п. (см., например, [40–42] и приведённые там ссылки).

В данной работе предлагается рассматривать взаимосвязь синхронных и десинхронных доменов в комплексе. Это позволяет детально исследовать режимы перемежаемости при синхронизации хаотических систем. Кроме того, существенно переработаны положения символического СТQ-анализа: правила кодирования символов базового алфавита сформулированы в строгой и формальной форме, что позволило сформировать полный состав символов. Также предложен ряд мер для оценивания временной структуры синхронизации. В качестве изучаемого примера выбрана система логистических отображений, являющаяся с одной стороны, эталонным объектом нелинейной динамики, с другой стороны, с учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой системы распространяются на широкий класс как модельных так и реальных объектов.

2. Определение Т-синхронизации хаотических систем

Введём в рассмотрение траекторию динамической системы, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда): $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$, где фазовая переменная \mathbf{s} системы имеет размерность N , а траектория состоит из K временных отсчётов. При этом каждому k -му отсчёту может быть сопоставлен момент времени t_k .

Определим исходное отображение, кодирующее, в терминах конечного Т-алфавита [38, 39], форму n -й компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$:

$$\left\{ \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} \right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \quad T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]. \quad (2.1)$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчёта и n -й фазовой переменной, приведены на рисунке 1.

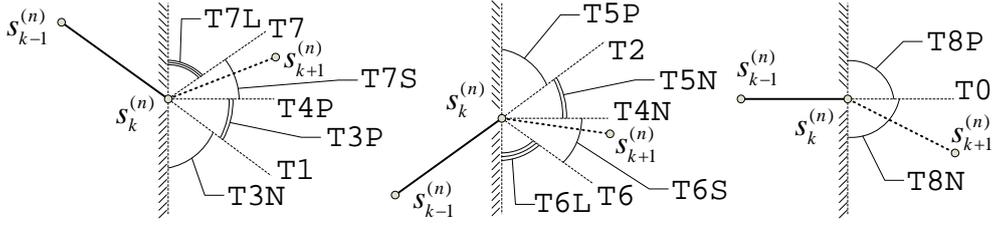


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчёта и n -й фазовой переменной.

Строго, отображение (2.1) задаётся через соотношения:

$$\begin{aligned}
 T0 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ = 0, \\
 T1 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ < 0, \\
 T2 & \quad \Delta s_- = \Delta s_+ > 0, \\
 T3N & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
 T3P & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
 T4N & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
 T4P & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
 T5N & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
 T5P & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
 T6S & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
 T6 & \quad \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0, \\
 T6L & \quad \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
 T7S & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
 T7 & \quad \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0, \\
 T7L & \quad \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
 T8N & \quad \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ < 0, \\
 T8P & \quad \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ > 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь $\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}$ и $\Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}$.

Таким образом, Т-алфавит включает в себя множество символов:

$$T_o^{\alpha\varphi} = \{T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, T5N, T5P, T6S, T6, T6L, T7S, T7, T7L, T8N, T8P\}. \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3) символ $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде Ti , где i – это правая часть кодов символов алфавита $T_o^{\alpha\varphi}$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $Ti_1 \cdots i_N$, см. (2.1). Полный алфавит $T_o^{\alpha\varphi}|N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ в целом, состоит из 17^N символов.

Предположим теперь, для простоты, но без потери общности, что временная последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ размерностью N формируется за счёт объединения фазовых переменных N одномерных динамических систем, т.е. $\mathbf{s}_k^{(n)}$ – это значение фазовой переменной n -й системы в k -й момент времени.

Будем считать динамические системы синхронными в момент времени k , в смыс-

ле Т-синхронизации [35], если выполняется условие $J_k=1$, где:

$$J_k = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}, \quad (2.4)$$

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [11] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных: $\mathbf{s}_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot \mathbf{s}_k^{(n)}$. В этом случае для n -й системы замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ в k -м отсчёте происходит по схеме:

$$\begin{aligned} T0 &\leftrightarrow T0, \\ T1 &\leftrightarrow T2, \quad T3N \leftrightarrow T5P, \quad T3P \leftrightarrow T5N, \quad T4N \leftrightarrow T4P, \\ T6S &\leftrightarrow T7S, \quad T6 \leftrightarrow T7, \quad T6L \leftrightarrow T7L, \quad T8N \leftrightarrow T8P. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Каждый вариант инвертирования обозначим номером m . Общее количество вариантов инвертирования есть $M = 2^{N-1}$.

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [12]. Для её обнаружения необходимо подвигать, относительно друг друга, фазовые траектории систем (сдвиги $h_n \geq 0$):

$$\{T_k^{\alpha\varphi}|_1 \rightarrow T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \rightarrow T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N\}. \quad (2.6)$$

Так как противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, то при расчёте частного интегрального коэффициента синхронности учтём это обстоятельство:

$$\delta_{m,\mathbf{h}}^s = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J_k | \{m, \mathbf{h}\}, \quad (2.7)$$

где $k^* = 1 + \max(h_1, \dots, h_N)$, $K^* = K + \min(h_1, \dots, h_N)$, а K – длина последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$.

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^s = \max_m \max_{\mathbf{h}} \delta_{m,\mathbf{h}}^s, \quad 0 \leq \delta^s \leq 1, \quad (2.8)$$

т. е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые, в совокупности, доставляют максимальное количество отсчётов k , отвечающих условию $J_k = 1$.

Из определения условия синхронизации (2.4) следует, что предложенный анализатор оценивает уровень полной синхронизации [10], обнаруживает противофазную синхронизацию [11] с лаг-синхронизацией [12] именно в алфавитном представлении $T_0^{\alpha\varphi}$. Но из определения геометрии символов Т-алфавита (2.2) полная синхронизация на уровне отсчётов $T_k^{\alpha\varphi}$ является более широким явлением, нежели полная синхронизация на уровне \mathbf{s}_k – отсчётов самой последовательности. Ибо Т-синхронность динамических систем (по набору фазовых переменных \mathbf{s}) рассматривается с позиций формы (структуры геометрии) траекторий систем в расширенном фазовом пространстве. Под формой (структурой геометрии) траектории динамической системы в расширенном фазовом пространстве понимается некий её инвариант, сохраняющийся при однородных сдвигах и растяжениях траектории в пространстве фазовых переменных. Таким образом, в определённом смысле, Т-синхронизация изучает топологические аспекты синхронизации динамических систем [20, 40, 43]. Следовательно, это открывает потенциальную возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщённой синхронизации хаоса [9].

3. Временная структура синхронизации хаотических систем

Введённая через (2.8) величина δ^s характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени $t_K - t_1$. Как указано во Введении, большинство исследований по синхронизации хаоса этим обычно и ограничиваются. Но зачастую исследователя может интересовать и временная структура синхронизации систем. Напомним, что под этой структурой понимаются всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16].

В работе автора [35] было введено понятие *синхронного домена* SD – совокупности отсчётов временного ряда для которых справедливо условие (\vee – символ логического ИЛИ):

$$\begin{aligned} \text{SD}_r : \{ J_{k'} = 1, J_{k''} = 0 \vee k'' = 0, J_{k'''} = 0 \vee k''' = K + 1 \}, \\ k' = \overline{b_r^{\text{SD}}, b_r^{\text{SD}} + L_r}, \quad k'' = b_r^{\text{SD}} - 1, \quad k''' = b_r^{\text{SD}} + L_r^{\text{SD}} + 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где: b_r^{SD} – момент появления, L_r^{SD} – длина и r – порядковый номер синхронного домена. Причём справедливы условия: $L_r^{\text{SD}} \leq K$, и общее количество синхронных доменов (в исходной последовательности) $R^{\text{SD}} \leq (K + 1) \text{div } 2$.

Для возможности количественного описания структуры синхронизации систем, автором в работе [35] была введена функция спектральной плотности синхронных доменов SD :

$$H^{\text{SD}} [L] = \sum_{r=1}^{R^{\text{SD}}} \delta[L_r^{\text{SD}}, L], \quad (3.10)$$

где $\delta[o, \circ]$ – символ Кронекера, $L = \overline{1, K}$.

С целью анализа степени вырожденности структуры синхронных доменов, дополнительно определим величину E^{SD} – энтропию структуры синхронных доменов (по Шеннону) [36], имеющую смысл при $\delta^s > 0$:

$$E^{\text{SD}} = - \sum_{i=1}^K P^{\text{SD}} [i] \ln P^{\text{SD}} [i], \quad P^{\text{SD}} [L] = \frac{H^{\text{SD}} [L]}{\sum_{i=1}^K H^{\text{SD}} [i]}. \quad (3.11)$$

Из свойств энтропии Шеннона следует, что энтропия E^{SD} минимальна ($E^{\text{SD}} = 0$) – когда спектр $H^{\text{SD}} [L]$ – вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ($E^{\text{SD}} = \hat{E}^{\text{SD}}$) – в случае равномерного гребёнчатого спектра $H^{\text{SD}} [L]$ с предельным числом различных длин доменов синхронизации равно $\hat{W}_{cmb}^{\text{SD}}$:

$$\hat{W}_{cmb}^{\text{SD}} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sqrt{1 + 8 \delta^s K} - 1}{2} \right\rfloor, K - \delta^s K + 1 \right\}, \quad \hat{E}^{\text{SD}} = \ln \hat{W}_{cmb}^{\text{SD}}, \quad (3.12)$$

где $\lfloor a \rfloor$ – целая часть a .

На основе (3.11) и (3.12) определим относительную энтропию структуры синхронных доменов:

$$\Delta_E^{\text{SD}} = \frac{E^{\text{SD}}}{\hat{E}^{\text{SD}}}. \quad (3.13)$$

Величину Δ_E^{SD} имеет смысл применять, если перед исследователем стоит задача сравнить случаи синхронизации различающиеся величинами δ^s и/или K .

Тем не менее, изучение только синхронных доменов SD – явно недостаточно для полного описания перемежаемого поведения хаотических систем при синхронизации. Чтобы представление о временной структуре синхронизма динамических систем было полным и замкнутым (полное и замкнутое представление о структуре перемежаемости), в настоящей работе дополнительно вводится понятие *десинхронного домена* \bar{SD} – совокупности отсчётов временного ряда, для которых справедливо условие:

$$\begin{aligned} \bar{SD}_r : \{ & J_{k'} = 0, J_{k''} = 1 \vee k'' = 0, J_{k'''} = 1 \vee k''' = K + 1 \}, \\ & k' = \overline{b_r^{\bar{SD}}}, \overline{b_r^{\bar{SD}} + L_r^{\bar{SD}}}, \quad k'' = b_r^{\bar{SD}} - 1, \quad k''' = b_r^{\bar{SD}} + L_r^{\bar{SD}} + 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где: $b_r^{\bar{SD}}$ – момент появления, $L_r^{\bar{SD}}$ – длина и r – порядковый номер десинхронного домена \bar{SD} .

Необходимость согласованного рассмотрения десинхронных и синхронных доменов схематично проиллюстрируем модельным примером (см. рисунок 2а). Определим три варианта (А, В и С), имеющие одинаковый интегральный коэффициент синхронности, одинаковый набор и последовательность синхронных доменов SD, но существенно различающиеся набором и последовательностью десинхронных доменов \bar{SD} .

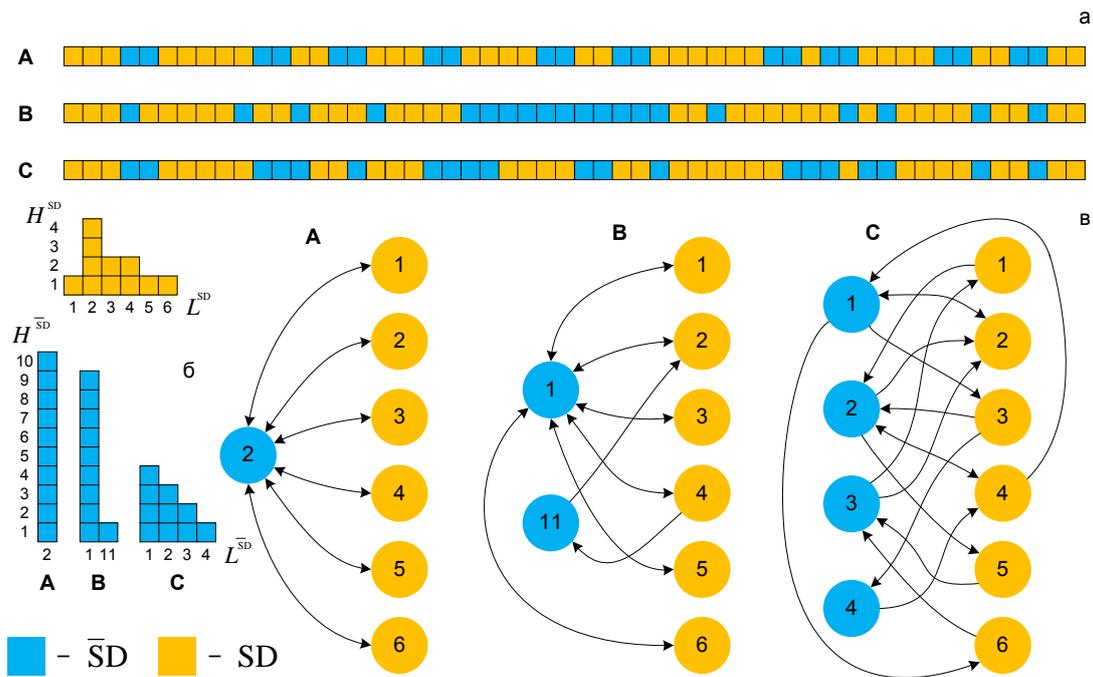


Рис. 2. Модельный пример: а – порядок следования доменов: \bar{SD} – десинхронных и SD – синхронных; б – спектральные плотности десинхронных и синхронных доменов; в – схема переходов $\bar{SD} \leftrightarrow SD$ между доменами определённой длины. Буквами А, В и С обозначены три случая имеющие различную структуру десинхронного поведения.

Если указанные модельные варианты сравнивать только по параметрам доменов SD, то формулируется неверный вывод об идентичности процессов синхронизации в этих самых случаях. Но рисунок 2а указывает на обратное. Поэтому дополнительно к доменам SD рассмотрим домены \bar{SD} . Из рисунков 2б и 2в видно, что в случае А – все десинхронные домены имеют длину 2 отсчёта, в случае В – десинхронные домены имеют длину 2 и 11 отсчётов, причём десинхронный домен длиной 11 отсчётов единственный. Случай С – наиболее сложно устроен, помимо того, что десинхронные

домены имеют четыре различные длины: 1, 2, 3 и 4 отсчёта, так ещё и структура переходов $\bar{S}D \leftrightarrow SD$ достаточно нетривиальна. Таким образом, согласованный анализ параметров доменов $\bar{S}D$ и SD , а также структуры переходов $\bar{S}D \leftrightarrow SD$ позволяет получить существенно больше информации о характере перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах. Необходимо отметить, что в большинстве случаев (см. для примера [23, 28–33]) анализу подвергаются, как правило, именно паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал, т.е. из анализа исключаются.

Количественное исследование временной структуры синхронизации возможно через изучение графа (см. рисунок 2в), вершинами которого являются домены $\bar{S}D$ и SD с той или иной длиной \bar{L} и L , соответственно, а дугами (ориентированными рёбрами) – междоменные переходы $\bar{S}D \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{S}D$. Разметка вершин этого графа производится посредством вероятностей $P^{\bar{S}D}$ и P^{SD} , а разметка дуг – через условные переходные вероятности:

$$P^{\bar{S}S}[\bar{L}, L] = \frac{H^{\bar{S}S}[\bar{L}, L]}{\sum_{\bar{l}=1}^K \sum_{l=1}^K H^{\bar{S}S}[\bar{l}, l]}, \quad P^{S\bar{S}}[L, \bar{L}] = \frac{H^{S\bar{S}}[L, \bar{L}]}{\sum_{l=1}^K \sum_{\bar{l}=1}^K H^{S\bar{S}}[l, \bar{l}]}, \quad (3.15)$$

где $H^{\bar{S}S}$ и $H^{S\bar{S}}$ – спектральные плотности междоменных переходов $\bar{S}D \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{S}D$, соответственно.

Отметим, что анализ графа переходов $\bar{S}D \leftrightarrow SD$ потенциально открывает широкие возможности по применению к исследованию временной структуры синхронизации хаотических колебаний, активно развиваемого в настоящее время в физике, инструментария теории сетей [34, 44–46], привлекая в том числе методы статистической физики [47] и символической динамики [40–42]. Отметим, что эти вопросы являются предметом наших текущих исследований.

4. Исследование системы логистических отображений

Система связанных логистических отображения является одной из популярных моделей нелинейной динамики при изучении хаотической синхронизации [38, 48]. Её теоретическое значение обусловлено тем, что при относительной простоте, логистическое отображение порождает широкий спектр сложных, в том числе и хаотических колебательных режимов [39, 49]. Переход к которым осуществляется через классический сценарий удвоения периода. А с учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных физических, биофизических, химических и других систем, что обуславливает к логистическому отображению и прикладной интерес [49, 50].

Рассмотрим систему двух однонаправленно связанных логистических осцилляторов:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4\lambda x_k (1 - x_k), \\ y_{k+1} &= 4\lambda [y_k + \gamma(x_k - y_k)] (1 - [y_k + \gamma(x_k - y_k)]), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где: $\lambda \in (0, 1]$ – управляющий параметр, $\gamma \in [0, 1]$ – коэффициент связи систем, $x, y \in (0, 1)$ – фазовые переменные ведущей и ведомой систем, соответственно.

Исследование отображений (4.16) проводилось на интервале $k \in [1 \cdot 10^5, 2 \cdot 10^5]$. Подобный сдвиг от $k = 1$ объясняется необходимостью сведения паразитного влия-

ния переходного процесса к минимуму. Кроме того, все оценки анализируемых величин усреднялись по 1000 реализациям начальных условий: $x_1 = \xi_1, y_1 = \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ – некоррелированные равномерно распределённые случайные величины. Это позволило нейтрализовать на траекториях процессов x и y эффект памяти индуцированный начальными условиями. Значение параметра связи изменялось на интервале $\gamma \in [0, 0.5]$ с дискретой $1 \cdot 10^{-4}$. Значение управляющего параметра было принято $\lambda = 0.95$ – режим существования в (4.16) развитого хаоса [50]. Необходимо отметить, что согласно результатам работы [39] – окончательное качественное усложнение хаотической траектории происходит при $\lambda = 0.98805\dots$ Тем не менее, произведённый выбор значения управляющего параметра объясняется необходимостью взаимного анализа и согласования результатов полученных в настоящей работе с результатами работ [38, 48]. В них в частности установлено, что при $\gamma \geq \gamma_{rb} \simeq 0.38$ – в системе реализуется грубый режим полной синхронизации, в точке $\gamma_{bb} \simeq 0.35$ – устанавливается негрубый режим полной синхронизации, который существует на интервале $\gamma_{bb} \leq \gamma < \gamma_{rb}$. На шкале параметра связи отмечены ещё четыре точки, ответственные за различные перестройки структуры аттрактора: $\gamma_{wm} \simeq 0.0639, \gamma_{ws} \simeq 0.14, \gamma_{r1} \simeq 0.2606$ и $\gamma_{r2} \simeq 0.2755$. Так, при γ_{ws} в аттракторе фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория проводит значительную часть времени [48], а при γ_{r1} траектория ведомой системы (y) содержит максимальную концентрацию релаксационных колебаний, отсутствующих в ведущей системе (x) [38].

На рисунке 3а приведен график зависимости интегрального коэффициента синхронности δ^s от параметра связи γ . При $\gamma_s \simeq 0.0191$ нижний квантиль $\hat{\delta}^s$ впервые превышает верхний квантиль $\hat{\delta}^s$. Таким образом, в первом приближении, точку γ_s возможно считать статистически значимым порогом возникновения T-синхронизации в системе (4.16). Отметим, что построение критических интервалов производилось по эмпирическим функциям распределений рассчитываемых характеристик. Верхний и нижний квантили строились как двусторонние порядков $1 - \alpha/2$ и $\alpha/2$, соответственно. Уровень статистической значимости принят $\alpha = 10^{-3}$. При этом в качестве оценки средней величины исследуемых характеристик в работе используется медиана, как более робастный индикатор, нежели арифметическое среднее [51]. На рисунке 3б приведен график зависимости от параметра γ величины $\Delta\delta^s = \hat{\delta}^s - \delta^s$.

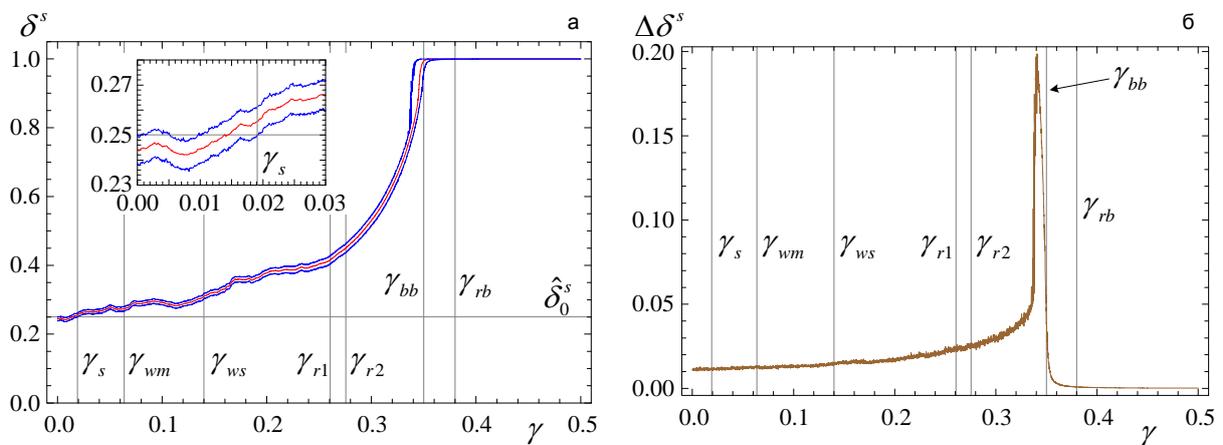


Рис. 3. Зависимость от параметра связи γ : а – интегрального уровня синхронизации δ^s (на врезке приведена область малых значений γ); б – ширины интервала $\Delta\delta^s = \hat{\delta}^s - \delta^s$; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, синий – интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

Из рисунка 3а видно, что по поведению интегрального коэффициента синхронности δ^s достоверно возможно обнаружить только область пузырящегося поведения системы вблизи γ_{bb} , в которой устанавливается негрубый режим полной T-синхронизации. Негрубость проявляется в более чем 5-ти кратном скачкообразном уширении интервала $\Delta\delta^s$ (см. 3б).

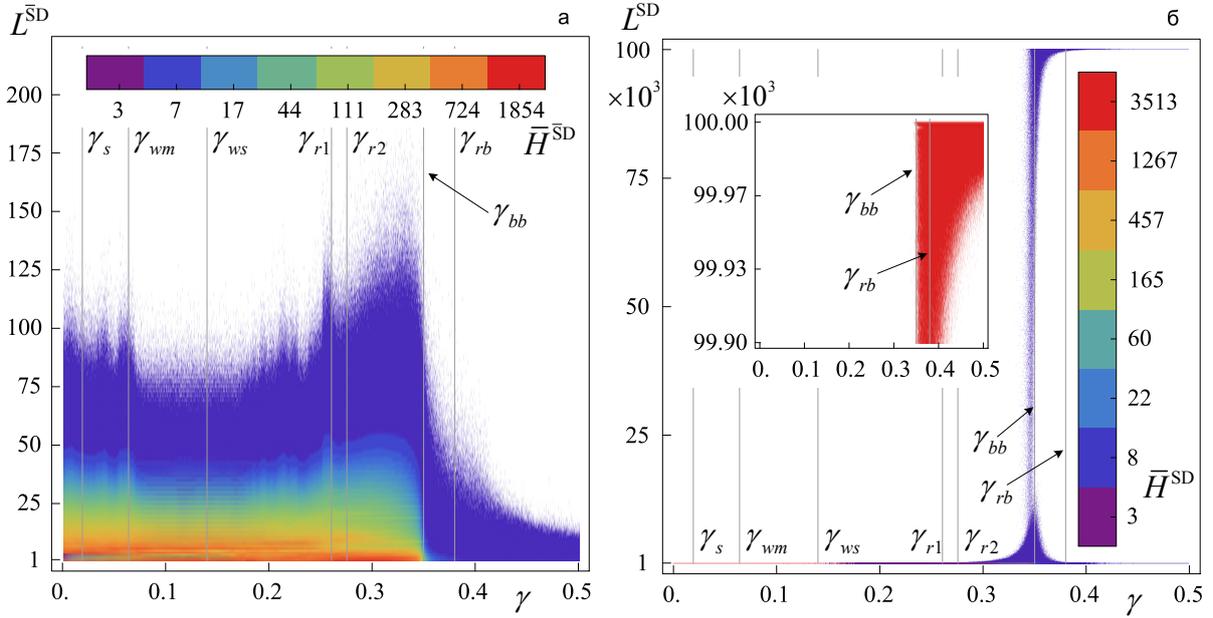


Рис. 4. Зависимость от параметра связи γ : а – \bar{H}^{SD} ; б – \bar{H}^{SD} (врезка демонстрирует зависимость \bar{H}^{SD} в области доменов большой длины $L^{\text{SD}} \geq 99900$).

Существенно более полную информацию о перестройке структуры аттракторов и временной структуре синхронизации предоставляет анализ медиан спектральных плотностей доменов $\bar{\text{SD}}$ и SD , которые приведены на рисунках 4а и 4б, соответственно.

Из анализа \bar{H}^{SD} (см. рисунок 4б) также возможно обнаружить момент установления полной T-синхронизации в системе (4.16) при γ_{bb} . Этот момент проявляется по взрывному росту длины синхронных доменов (см. врезку на рисунке 4б и рисунок 5б), а также по «перекачке» десинхронных доменов в синхронные.

При сравнении рисунков 4а и 4б видна существенная разница в поведении спектральных плотностей десинхронных $\bar{\text{SD}}$ и синхронных SD доменов. Так, максимальная длина десинхронных доменов на всём интервале изменения величины γ не превышает $\max L^{\bar{\text{SD}}} = 220$ отсчётов, в то время, как $\max L^{\text{SD}} = 10^5$ отсчётов (после установления грубого режима полной T-синхронизации). С повышением величины связи от 0 до γ_{bb} наблюдается монотонный рост длины синхронных доменов и сдвиг максимума спектральной области в сторону более длинных доменов. Это свидетельствует о том, что характеристика \bar{H}^{SD} не «чувствует» перестроек структуры аттрактора, происходящих в ведомой системе (y) вплоть до момента наступления негрубого режима полной T-синхронизации. В свою очередь, анализ \bar{H}^{SD} позволяет зафиксировать ряд перестроений структуры аттрактора в системе (y) происходящих под действием ведущей системы при изменении величины связи от 0 до γ_{bb} . Так, режимы при γ_{wm} и γ_{r1} сопровождаются локальными всплесками длины десинхронных доменов, а режим при γ_{ws} характеризуется явно выраженной гребёнчатой структурой спектра $\bar{\text{SD}}$ доменов малой длины (см. рисунок 5а). Подобный вид спектра действительно соответствует неустойчивому

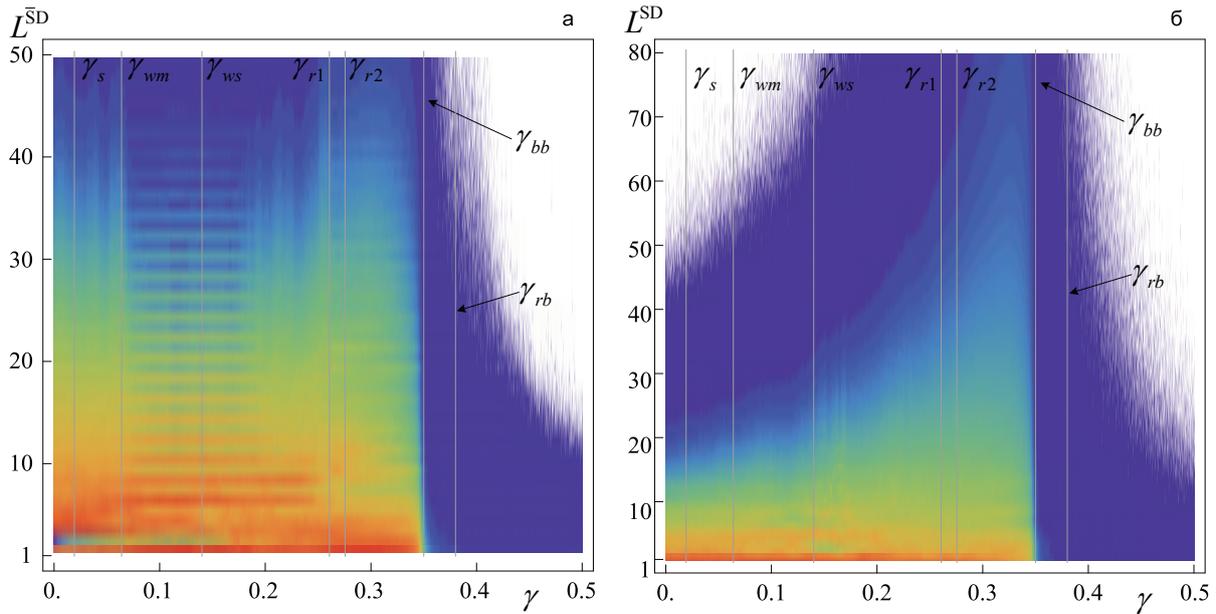


Рис. 5. Зависимость от параметра связи γ : а – \bar{H}^{SD} (для доменов длиной $L^{\text{SD}} \leq 50$); б – \bar{H}^{SD} (для доменов длиной $L^{\text{SD}} \leq 80$); цветовые шкалы интенсивности соответствуют приведённым на рисунках 4а и 4б.

квазипериодическому движению, на котором траектория системы (4.16) проводит значительную часть времени [48].

Сравнение рисунков 6а и 6б также демонстрирует различие в поведении степени вырожденности структуры десинхронных и синхронных доменов в зависимости от γ – величины связи между ведущей и ведомой системами.

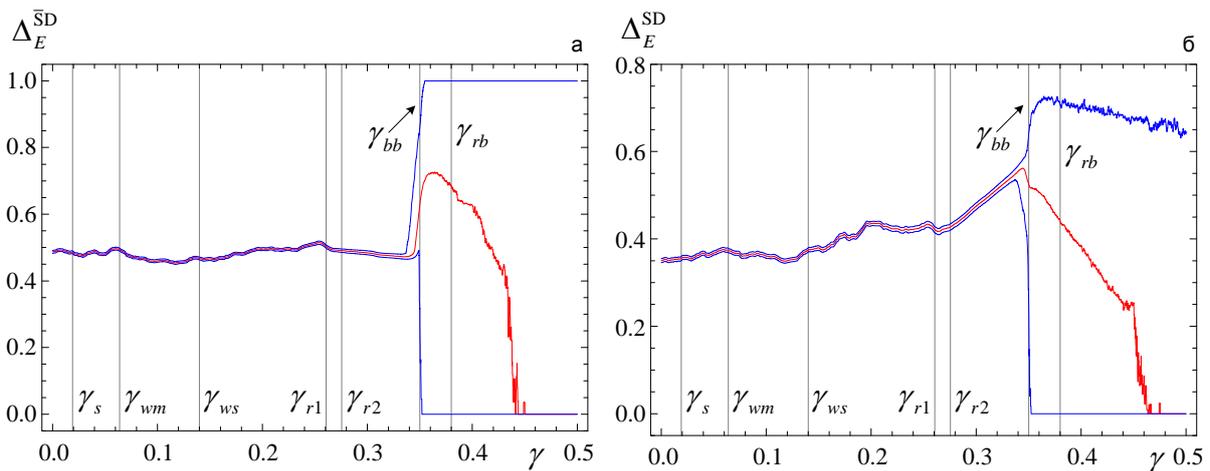


Рис. 6. Зависимость от параметра связи γ : а – Δ_E^{SD} ; б – Δ_E^{SD} ; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, синий – интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

Из анализа рисунков 6а и 6б следует, что практически вплоть до наступления негрубого режима полной T-синхронизации, относительная энтропия структуры доменов \bar{S}^{D} меняется очень слабо, оставаясь вблизи уровня 0.5. Имеются локальные статистически значимые всплески вблизи зон перестройки структуры аттрактора γ_{wm} и γ_{r1} .

При этом ширина коридора значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$ остаётся также практически постоянной. При приближении параметра γ к критическому значению γ_{bb} , и переходе системы в негрубый режим синхронизма, происходит раскрытие коридора значений Δ_E^{SD} с границами по вероятности $1 - \alpha$, а медиана $\bar{\Delta}_E^{\text{SD}}$ испытывает скачок с 0.5 до 0.73. При дальнейшем увеличении силы связи до $\gamma = 0.5$, ширина коридора не изменяется, а медиана $\bar{\Delta}_E^{\text{SD}}$ уменьшается до значений близких к нулевым. В свою очередь, относительная энтропия структуры синхронных доменов SD при росте параметра связи от $\gamma = 0$ вначале локально (статистически значимо) повышается с 0.35 до 0.375 в области γ_{wm} , затем возвращается на исходный уровень, а начиная с области около γ_{ws} вновь начинает расти. Перед зоной γ_{r1} имеется локальный максимум, в зоне $[\gamma_{r1}, \gamma_{r2}]$ – локальный минимум. При дальнейшем увеличении силы связи вблизи γ_{bb} происходит раскрытие коридора значений Δ_E^{SD} с границами по вероятности $1 - \alpha$, а медиана $\bar{\Delta}_E^{\text{SD}}$ по достижению максимума в 0.57 уменьшается до значений близких к нулевым. Из представленного анализа следует, что относительные энтропии Δ_E^{SD} и $\bar{\Delta}_E^{\text{SD}}$ являются весьма чувствительным индикатором перестроений структуры аттрактора происходящих в режиме синхронизации хаоса.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе предложен новый метод комплексного исследования временной структуры синхронизации нелинейных хаотических систем. Метод позволяет диагностировать и количественно оценивать характеристики перемежаемости при синхронизации хаотических колебаний в режиме так называемой T-синхронизации [35, 36]. В основе подхода лежит формализм символического CTQ-анализа, предложенного автором в работах [38, 39].

В рамках демонстрации основных возможностей инструментария проведён анализ системы двух идентичных логистических осцилляторов с однонаправленной связью, находящихся в режиме развитого хаоса. Эта система является эталонной моделью нелинейной динамики. Кроме того, с учётом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой модели распространяются на широкий класс как теоретических так и реальных объектов [49, 50]. В результате проведённого анализа выявлены факты установления в системе негрубого и робастного режимов полной T-синхронизации. При этом негрубый режим сопровождается «пузырящимся» аттрактором, в котором наблюдается перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением осцилляторов. Помимо этого, подтверждены выводы работы [48], о том, что при определённых значениях силы связи между подсистемами, в аттракторе фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория проводит значительную часть времени. Также установлено, что выявленный в работе [38] режим, при котором траектория ведомой подсистемы содержит максимальную концентрацию релаксационных колебаний, отсутствующих в ведущей подсистеме, приводит к локальному росту девиации длины десинхронных доменов. Это усиливает перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением осцилляторов.

Проведённое исследование подтвердило, что широко распространённый подход, при котором анализу подвергаются только паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал и фактически не анализируются – следует признать методологически неполным из-за потери существенной информации о характере перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах.

В заключение, отметим, что рассмотренный метод, основанный на анализе T-синхронизации, может быть с успехом применён для исследования многомерных систем состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решёток с произвольной топологией. Изложенный подход применим для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, инвариантность анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [39], позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем. Вполне возможно, это позволит эффективно применять предложенную методику для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими и техническими [1, 4, 5], биофизическим [23–25], финансовыми [26, 37, 46], энергетическими [33] и другими системами.

Список литературы

1. *A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths*, Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press (2001).
2. *S. Boccaletti, J. Kurths, G.V. Osipov et al., C. Zhou*, Physics Reports **366**, 1 (2002).
3. *В.Ю. Аргонов, С.В. Пранц*, Письма в ЖЭТФ **80**, 260 (2004).
4. *С.П. Кузнецов*, УФН **181**, 121 (2011).
5. *А.П. Напартович, А.Г. Сухарев*, ЖЭТФ **115**, 1593 (1999).
6. *К.М. Суото, А.В. Oppenheim*, Phys. Rev. Lett. **71**, 65 (1993).
7. *L. Larger, J.-P. Goedgebuer*, C.R. Physique **5**, 609 (2004).
8. *M. Planat*, Neuroquantology **2**, 292 (2004); ArXiv quant-ph/0403020.
9. *H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik*, Phys. Rev. E **53**, 4528 (1996).
10. *L.M. Pecora, T.L. Carroll*, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990).
11. *W. Liu, X. Qian, J. Yang et al.*, Phys. Lett. A **354**, 119 (2006).
12. *M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4193 (1997).
13. *В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов*, Письма в ЖТФ **14**, 569 (1988).
14. *A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **10**, 2291 (2000).
15. *А.А. Короновский, А.Е. Храмов*, Письма в ЖЭТФ **79**, 391 (2004).
16. *Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин и др.*, УФН **152**, 3 (1987).
17. *В.В. Mandelbrot*, J. Fluid Mech. **62**, 331 (1974).
18. *И.М. Дрёмин*, УФН **152**, 531 (1987).
19. *С.Ф. Шандарин, А.Г. Дорошкевич, Я.Б. Зельдович*, УФН **139**, 83 (1983).
20. *Х.В. Брур, Ф. Дюмортье, С. Стрин, Ф. Такенс*, Структуры в динамике, М.-Иж.: ИКИ (2003).
21. *О.В. Геращенко*, ЖЭТФ **116**, 1477 (1999).
22. *В.К. Тюменев*, ЖЭТФ **107**, 1357 (1995).
23. *M. Ghorbani, M. Mehta, R. Bruinsma et al.*, Phys. Rev. E **85**, 021908 (2012).
24. *С.В. Борисов, А.Я. Каплан, Н.Л. Горбачевская и др.*, Физиология человека **31**, 1 (2005).
25. *A. Porta, G. D’Addio, G.D. Pinna et al.*, Symbolic analysis of 24h holter heart period variability series: comparison between normal and heart failure patients, Proceedings Computers in Cardiology 2005, p. 575.
26. *P. Tino, C. Schittenkopf, G. Dorffner*, Pattern Analysis & Appl. **4** 283 (2001).
27. *P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart*, Physics Letters A **193**, 126 (1994).
28. *D. Zueco, P.J. Martinez, L.M. Floria et al.*, Phys. Rev. E **71**, 036613 (2005).
29. *V. Casagrande, A.S. Mikhailov*, Physica D **205**, 154 (2005).

30. *P. Palaniyandi, P. Muruganandam, M. Lakshmanan*, Chaos, Solitons and Fractals **36**, 991 (2008).
31. *J.G. Restrepo, E. Ott, B.R. Hunt*, Phys. Rev. E **69**, 066215 (2004)
32. *S. Ahn, L.L. Rubchinsky*, Chaos **23**, 013138 (2013).
33. *L.M. Pecora, F. Sorrentino, A.M. Hagerstrom et al.*, Nature Comm. **5**, 4079 (2014).
34. *F. Battiston, V. Nicosia, V. Latora*, Phys. Rev. E **89**, 032804 (2014).
35. *А.В. Макаренко*, Письма в ЖТФ **38**, 53 (2012).
36. *А.В. Макаренко*, Наноструктуры. Матем. физика и модел. **8**, 21 (2013).
37. *A.V. Makarenko*, Symbolic CTQ-analysis — a new method for studying of financial indicators, Book of Abstracts International Conference "Advanced Finance and Stochastics"(Steklov Mathematical Institute, 24-28 June 2013), Moscow, p. 63.
38. *А.В. Макаренко*, Письма в ЖТФ. **38**, 1 (2012).
39. *А.В. Макаренко*, Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **52**, 1248 (2012).
40. *P. Бюэн*, Методы символической динамики. М.: Мир (1979).
41. *C.S. Hsu*, Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems, Springer-Verlag, N.Y. (1987).
42. *M. Dellnitz, A. Hohmann*, Numerische Mathematik **75**, 293 (1997).
43. *R. Gilmore, M. Lefranc*, The topology of chaos. Wiley-Interscience (2002).
44. *J. Davidsen, P. Grassberger, M. Paczuski*, Phys. Rev. E **77**, 066104 (2008).
45. *M. Domenico, A. Sole-Ribalta, E. Cozzo et al.*, Phys. Rev. X **3**, 041022 (2013).
46. *P. Fiedor*, Phys. Rev. E **89**, 052801 (2014).
47. *G. Bianconi*, Phys. Rev. E **87**, 062806 (2013).
48. *А.В. Шабунин, В.В. Демидов, В.В. Астахов и др.*, Письма в ЖТФ **27**, 78 (2001).
49. *E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov*, Chaotic synchronization: Applications to living systems. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 42.) River Edge, N.J.: World Sci. Publ. (2002).
50. *M. Фейгенбаум*, УФН **141**, 343 (1983).
51. *Э. Леман*, Проверка статистических гипотез. М: Наука (1979).

Макаренко Андрей Викторович,
канд. техн. наук,
рук. научно-исследовательской группы
«Конструктивная Кибернетика»,
e-mail: avm.scince@mail.ru

Подписано 28 октября 2014 г.