

УДК: 51-7, 519.6, 519.217, 530.182;
MSC: 37M10, 37M20, 34C28, 34C15, 34D06;
PACS: 02.70.-c, 05.45.-a, 05.45.Tr, 05.45.Xt.

Возможности символического анализа в пространстве «скорость-кривизна»: TQ-бифуркации, симметрии, синхронизация

А. В. Макаренко^{a, b, 1}

^a Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»
Россия, 101000, Москва, а/я 560, Web: www.rdcn.ru

^b Институт проблем Управления РАН
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

В докладе изложен разработанный автором новый метод символического анализа на основе конечного разбиения пространства «скорость-кривизна». Введён минимальный алфавит, инвариантный к однородным растяжениям и сдвигам изучаемой последовательности. Предложенный способ анализа является вычислительно ориентированным и позволяет детально исследовать форму траекторий и структуру динамики многомерных дискретных последовательностей, отображений, потоков. Для этого определён ряд базовых аналитических характеристик, и понятий: TQ-бифуркация, синхронный домен, и т. п. Показана возможность конструктивного применения метода к задачам исследования: глобальной структуры траекторий динамических систем, симметрии динамических процессов и систем, синхронизации хаотических колебаний.

Ключевые слова: символический STQ-анализ, дискретная динамическая система, форма траектории, структура динамики, симметрии, символический образ, TQ-бифуркация, T-синхронизация.

1. Введение

Современной парадигмой изучения нелинейных систем с преимущественно хаотическим поведением является эргодический (метрический) подход в котором рассматриваются типичные свойства динамической системы и игнорируются исключительные (редкие) траектории [1]. В этом подходе, в качестве основополагающего представления, используется понятие меры [2]. Классические величины, как-то: показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова-Синяя, размерностные характеристики (информационная ёмкость, фрактальная размерность), корреляционный интеграл, использующиеся в теории и практике исследований хаоса, имеют самую непосредственную связь с эргодической теорией.

Хаотические системы, как класс динамических систем, в том числе и с конкретным физическим содержанием [3], относятся к случаю «квазислучайного» поведения [4–6] и для их описания удобно пользоваться топологическими аналогами некоторых понятий вероятностного происхождения [1, 7, 8]. Именно в этом ключе действует и

¹E-mail: avm.science@mail.ru

символическая динамика [9, 11], которая наиболее эффективна как раз в ситуациях где детерминированные системы демонстрируют аналогию со случайными процессами [10].

Существующие методы вычислительно ориентированного символического анализа [12–14] в принципе позволяют изучать ряд аспектов хаотических систем, в том числе: странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость, и т.п. Помимо теоретического аспекта, у символического анализа имеется и прикладное значение. Его активно используют в различных областях: анализ ЭЭГ в нейрофизиологии [15, 16]; разработка телекоммуникационных и связанных протоколов [17]; анализ финансовых индикаторов [18]; разработка сложных систем управления [19]; анализ ЭКГ в кардиологии [20]. Применяемые в этих методах исследования схемы формирования алфавитов, как правило, обладают теми или иными недостатками [21]: неинвариантность алфавита к преобразованиям сдвига и масштаба; неоднозначность разбиения пространства состояний; различные трактовки вероятностных мер при попадании траектории на границу ячейки; эмпирический подбор количества символов в алфавите.

Ранее, в работах автора [21–23], был предложен новый метод символического анализа, через конечное разбиение пространства «скорость-кривизна», и введен в рассмотрение минимальный алфавит. Подобный подход оказался свободен от некоторых недостатков символического анализа на основе классических алфавитов с разбиением пространства состояний или скоростей. Предложенный метод (символический СТQ-анализ) позволяет детально изучать форму (структуру геометрии) траекторий динамических систем в расширенном пространстве состояний (о важности этой характеристики см. [1, 7, 24, 25]) и конструктивно дополняет существующие подходы к символическому анализу в части вычислительно ориентированных методов.

Настоящая работа продолжает тематику разработки СТQ-анализа, содержит ряд новых результатов и построена следующим образом. В разделе 2 приведено краткое описание формализма СТQ-анализа. Раздел 3 посвящён TQ-бифуркациям в дискретных динамических системах, а раздел 4 содержит описание T-синхронизации хаотических колебаний. В разделе 5 приведены выводы по работе в целом.

2. Основные положения символического СТQ-анализа

Введём в рассмотрение модель динамической системы в виде дискретного отображения:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}), \quad (2.1)$$

со свойствами:

$$\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^L, \quad k \in K \subset \mathbb{N}, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, K},$$

где \mathbf{s} – переменная состояния динамической системы, \mathbf{p} – вектор параметров модели, N – размерность пространства состояний системы, K – количество итераций эволюции системы. С отображением (2.1) свяжем также последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ – траекторию эволюции динамической системы. Сформулируем базовую гипотезу.

Гипотеза 1. *Форма траектории последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ в пространстве $S \times K$ адекватно отражает (вскрывает) некие ключевые внутренние свойства самой динамической системы (2.1), важные с позиций вопросов идентификации, управления и предсказания её эволюции.*

Отметим, что набор критических свойств динамических систем весьма разнообразен, и зависит, как от цели и задач исследования, так и от класса, к которому принадлежит система (2.1). Что касается понятия формы траектории, то введём определение, записанное в его простейшей форме.

Определение 1. *Под характеристиками формы траектории последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$ в пространстве $S \times K$ понимаются некие её инварианты, сохраняющиеся при однородных сдвигах и растяжениях в пространстве S и однородных сдвигах в пространстве K .*

Как показано в работе автора [26], форма траектории динамического процесса вполне описывается двумя величинами: крутизной и кривизной графика траектории. Поэтому для последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$ рассчитаем две характеристики: $\alpha_k^{(n)}$ – крутизну, и $\varphi_{0k}^{(n)}$ – кривизну графика траектории n -фазовой переменной системы при k -м отсчёте в пространстве $S \times K$:

$$\alpha_k^{(n)} = c_{ss}^{(n)} \left(s_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n)} \right), \quad \varphi_{0k}^{(n)} = c_{as}^{(n)} \operatorname{tg} \frac{\arctg \alpha_k^{(n)} - \arctg \alpha_{k-1}^{(n)}}{2}. \quad (2.2)$$

Масштабные коэффициенты $c_{ss}^{(n)}, c_{as}^{(n)} > 0$, по умолчанию $c_{ss}^{(n)} = c_{as}^{(n)} = 1$. Отметим, что $\varphi_0^{(n)}$ – это дискретный аналог динамической кривизны [22], введённой автором в работе [26].

Закодируем величины (2.2) через конечный набор символов [22]:

$$\begin{aligned} C_k^\alpha|_n &= \begin{cases} \text{U} & \alpha_k^{(n)} > \delta_\alpha^+, \\ \text{D} & \alpha_k^{(n)} < \delta_\alpha^-, \\ \text{Z} & \alpha_k^{(n)} \in [\delta_\alpha^-, \delta_\alpha^+], \end{cases} \\ C_k^{\bar{\varphi}}|_n &= \begin{cases} \text{L} & \varphi_{0k}^{(n)} \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha|_n = C_{k-1}^\alpha|_n = \text{Z}, \\ \text{P} & \varphi_{0k}^{(n)} > \delta_\varphi^+ \wedge \{C_k^\alpha|_n \neq \text{Z} \vee C_{k-1}^\alpha|_n \neq \text{Z}\}, \\ \text{N} & \varphi_{0k}^{(n)} < \delta_\varphi^- \wedge \{C_k^\alpha|_n \neq \text{Z} \vee C_{k-1}^\alpha|_n \neq \text{Z}\}, \end{cases} \\ C_k^\varphi|_n &= \begin{cases} \text{L} & \varphi_{0k}^{(n)} \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha|_n = C_{k-1}^\alpha|_n = \text{Z}, \\ \text{E} & \varphi_k^{(n)} \notin [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \wedge \{ \{C_k^\alpha|_n = \text{D} \wedge C_{k-1}^\alpha|_n = \text{U}\} \\ & \vee \{C_k^\alpha|_n = \text{U} \wedge C_{k-1}^\alpha|_n = \text{D}\} \}, \\ \text{B} & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Параметры δ_α^\mp и δ_φ^\mp являются управляющими, и позволяют расширить аналитические возможности алфавитов [22], по умолчанию $\delta_\alpha^\mp = \delta_\varphi^\mp = 0$.

Из первичных символов $C^\alpha|_n, C^\varphi|_n$ и $C^{\bar{\varphi}}|_n$ сформируем термы $T^{\alpha\varphi}|_n$ – символы описывающие форму траектории n -й переменной системы в расширенном пространстве состояний:

$$T^{\alpha\varphi}|_n : \begin{array}{c} \text{U} \\ \text{D} \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \quad \text{L} \quad \text{E} \\ \hline \text{T5} \quad \text{T2} \quad \text{T7} \\ \text{T4} \quad \text{T0} \quad \times \\ \text{T3} \quad \text{T1} \quad \text{T6} \end{array}, \quad T^{\alpha\varphi}|_n : \text{T}m \begin{array}{c} \text{P} \quad \text{N} \\ \hline \text{T}m\text{P} \quad \text{T}m\text{N} \end{array}, \quad (2.4)$$

$m = 3, 4, 5.$

здесь \times – недопустимая комбинация символов в терме. Таким образом, полный алфавит, кодирующий форму траектории n -й фазовой переменной дискретной динамической системы, есть следующее множество символов:

$$T_o^{\alpha\varphi} = \{T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, T5N, T5P, T6, T7\}. \quad (2.5)$$

На рисунке 1а изображены графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ в расширенном фазовом пространстве переменной $s^{(n)}$ в момент k . Эти диаграммы также наглядно раскрывают суть символов $C^{\varphi}|_n$: L – Line; E – Extremum; B – Bend.

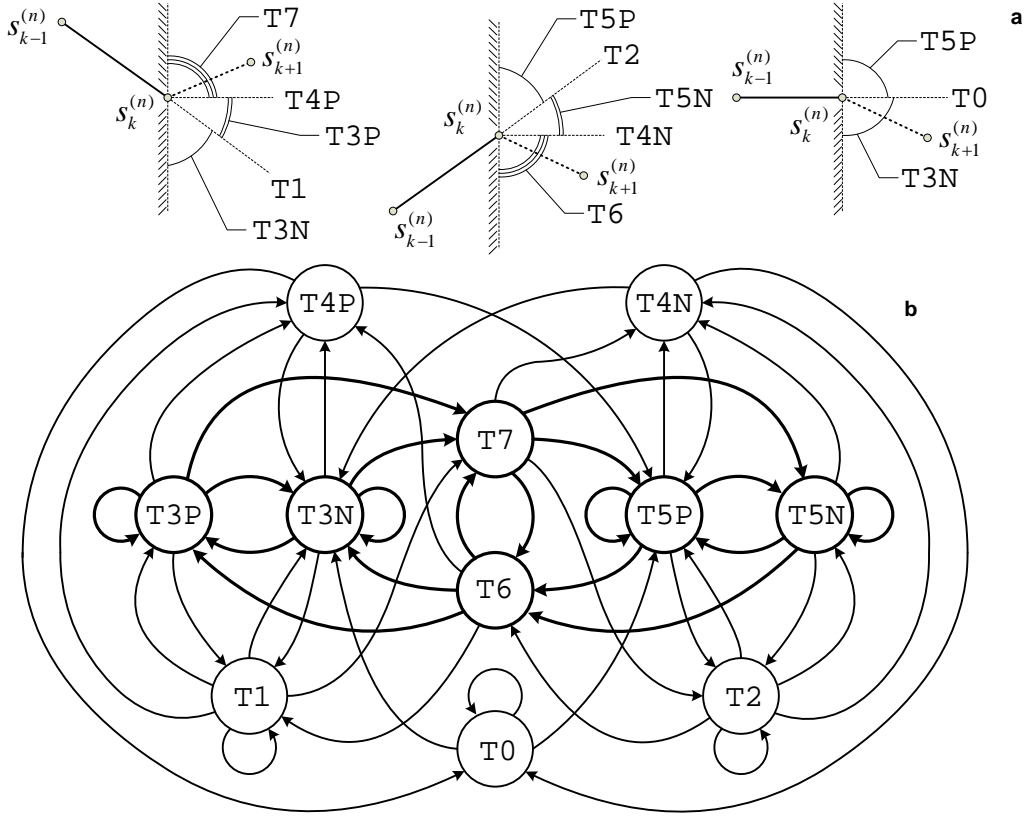


Рис. 1. (а) – графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию термов $T^{\alpha\varphi}|_n$; (б) – граф допустимых переходов между символами $T^{\alpha\varphi}|_n$ (жирным выделен подграф, не содержащий Z и/или L).

Переход между термами $T_k^{\alpha\varphi}|_n \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n$ обозначим через $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$. Этот переход кодируется символами Qij , где i, j – это составные части кодов $Ti_k|_n, Tj_{k+1}|_n$, определённых матрицами (2.4). На рисунке 1б показан граф допустимых переходов между символами $T^{\alpha\varphi}|_n$. Жирным выделен подграф допустимых переходов для термов $T^{\alpha\varphi}|_n$ не содержащих в своём составе Z и/или L символов. Все допустимые переходы составляют множество символов $Q_o^{\alpha\varphi}$.

Строго говоря, исходя из вида функций (2.2), для расчёта символьных величин $C^\alpha|_n, C^\varphi|_n, C^{\bar{\varphi}}|_n, T^{\alpha\varphi}|_n$ и $Q^{\alpha\varphi}|_n$ исходная последовательность должна иметь вид $\{s_k\}_{k=0}^{K+1}$, но для дальнейшего изложения этот момент не является принципиальным. Кроме того, вид (2.2), в принципе, избыточен для вычисления указанных символьных величин, но весьма полезен при вычислении различных аналитических характеристик траектории динамической системы [22].

Введём в рассмотрение ориентированный конечный граф (точнее псевдоорграф без кратных дуг, но с петлями):

$$\Gamma^{TQ}|_n = \langle V^\Gamma|_n, E^\Gamma|_n \rangle, \quad V^\Gamma|_n \subseteq T_o^{\alpha\varphi}, E^\Gamma|_n \subseteq Q_o^{\alpha\varphi}, \quad (2.6)$$

у которого вершины заданы множеством $V^\Gamma|_n$, а дуги – $E^\Gamma|_n$. Граф $\Gamma^{TQ}|_n$ назовём символьческим TQ-образом динамической системы по её n -й фазовой переменной.

С целью количественного оценивания характеристик формы траектории последовательности $\{s_k^{(n)}\}_{k=1}^K$ в пространстве $S^{(n)} \times K$ введём меру $\Delta^*|_n$ – частоту появления в $\{s_k^{(n)}\}$ символа $*$ ($0 \leq \Delta^*|_n \leq 1$):

$$\Delta^*|_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{|M^*|_n|}{U(K)}, \quad (2.7)$$

здесь $|\circ|$ – мощность множества, $*$ – некий символ, из которого состоит мультимножество $M^*|_n$:

$$\Delta^\alpha|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^\alpha|_n : C_k^\alpha|_n = *, \quad * = U, Z, D, \quad U(K) = K, \quad (2.8a)$$

$$\Delta^\varphi|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^\varphi|_n : C_k^\varphi|_n = *, \quad * = L, B, E, \quad U(K) = K - 1, \quad (2.8б)$$

$$\Delta^{\bar{\varphi}}|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^{\bar{\varphi}}|_n : C_k^{\bar{\varphi}}|_n = *, \quad * = L, N, P, \quad U(K) = K - 1, \quad (2.8в)$$

$$\Delta^T|_n : \quad M^*|_n \ni T_k^{\alpha\varphi}|_n : T_k^{\alpha\varphi}|_n = *, \quad * = T_o^{\alpha\varphi}, \quad U(K) = K - 1, \quad (2.8г)$$

$$\Delta^Q|_n : \quad M^*|_n \ni Q_k^{\alpha\varphi}|_n : Q_k^{\alpha\varphi}|_n = *, \quad * = Q_o^{\alpha\varphi} \setminus Q, \quad U(K) = K - 2, \quad (2.8д)$$

Отметим, что вычисление величин (2.8г) и (2.8д) делает граф $\Gamma^{TQ}|_n$ – взвешенным и позволяет исследовать марковские характеристики последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$ [11]. Дополнительную информацию о свойствах Δ^* , а также о других аналитических характеристиках см. в разделе 3 и статье [22].

Таким образом, определён минимальный, но, в определённом смысле, полный набор символов и характеристик, покомпонентно описывающих форму (структуру геометрии) многомерных траекторий дискретных отображений в пространстве $S^{(n)} \times K$. Тем не менее, изолированное изучение отдельных компонент многомерного процесса не позволяет до конца изучить его структуру в целом, так как в этом случае отсутствует информация о межкомпонентной динамике. Чтобы снять это ограничение введём в рассмотрение интегрированное описание последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$:

$$\begin{aligned} C_k^* &= [C_k^*|_1 \dots C_k^*|_N], \quad * = \alpha, \varphi, \bar{\varphi}, \\ T_k^{\alpha\varphi} &= [T_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots T_k^{\alpha\varphi}|_N], \quad Q_k^{\alpha\varphi} = [Q_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots Q_k^{\alpha\varphi}|_N]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Символы C^* кодируются словами $i_1 \dots i_N$, где i_n – это символы $C^*|_n$. Терм $T^{\alpha\varphi}$ кодируется через $T i_1 \dots i_N$, где i_n – это составная часть кодов $T i$, определённых матрицами (2.4), для n -ой компоненты последовательности. Соответственно, $Q_k^{\alpha\varphi}$ – переход между термами $T_k^{\alpha\varphi} \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}$ – кодируется как $Q i_1 \dots i_N j_1 \dots j_N$, где i_n, j_n – это составные части кодов $T i$ и $T j$, n -ой компоненты последовательности, определённых матрицами (2.4), для состояний k и $k + 1$, соответственно. Для полного алфавита $T_o^{\alpha\varphi}|_N$, кодирующего форму траектории последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$ в целом, справедливо условие: $|T_o^{\alpha\varphi}|_N| = 11^N$.

Отметим, что из вектора s возможно сформировать его проекции в подпространства исходного пространства S – множество векторов $[s']_u$, $u = \bar{1}, 2^N - 1$, содержащих различные комбинации компонент исходной последовательности и для них определить вышеперечисленные величины и характеристики. Эта совокупность позволяет детально изучать свойства многомерной траектории $\{s_k\}_{k=1}^K$ как цельного объекта динамики уже в пространстве $S \times K$.

3. TQ-бифуркации символического образа

Анализ символического TQ-образа динамической системы, посредством исследования структурных и метрических характеристик взвешенного графа Γ^{TQ} , способен

дать информацию о различных качественных характеристиках её динамики. На основе этих данных возможно определить наличие релаксационных колебаний и их характер, присутствие режимов обострения или успокоения динамики системы, и т. п. [22]. Весьма важная информация, о структуре последовательности, содержится в асимметриях графа (как качественных, так и количественных по параметрам Δ^*) относительно пар вершин и рёбер, связанных отношением инвертирования фазовых переменных системы $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$. В этом случае замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ и $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$ осуществляется в соответствии с таблицей 1. Отметим, что схема замены символов $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$ при инвертиро-

Таблица 1. Схема замены символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$, при $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$

+1	T0	T1	T2	T3N	T3P	T4N	T4P	T5N	T5P	T6	T7
-1	T0	T2	T1	T5P	T5N	T4P	T4N	T3P	T3N	T7	T6

вании отсчётов $s_k^{(n)}$ без труда формируется из данных таблицы 1.

Анализ вышперечисленных свойств динамики систем может проводиться как с позиций эргодической (метрической) теории, так и с позиций теории информации, т. е. либо на уровне многообразия типичных траекторий в «среднем», либо на уровне отдельных «редких» траекторий [2, 5, 11].

Ключевую роль в анализе свойств динамической системы (в излагаемом здесь аспекте) играет качественное изменение структуры её символического образа Γ^{TQ} , напрямую связанное с TQ-бифуркациями в самой системе. По своей сути, эти бифуркации подразделяются на три рода (см. рис. 2):

I – изменяется набор термов $T^{\alpha\varphi}$, набор переходов $Q^{\alpha\varphi}$ между неизменными термами остаётся неизменным.

II – набор термов $T^{\alpha\varphi}$ остаётся постоянным, но изменяется набор переходов $Q^{\alpha\varphi}$ между ними.

III – изменяется как набор термов $T^{\alpha\varphi}$, так и набор переходов $Q^{\alpha\varphi}$ между неизменными термами.

К примеру в логистическом отображении (см. раздел 3.2) присутствуют TQ-бифуркации всех трёх родов. Отметим, что в настоящий момент ведутся исследования на предмет поиска возможных запретов на существование TQ-бифуркаций различных родов у тех или иных отображений типа (2.1), в зависимости от их вида (структуры).

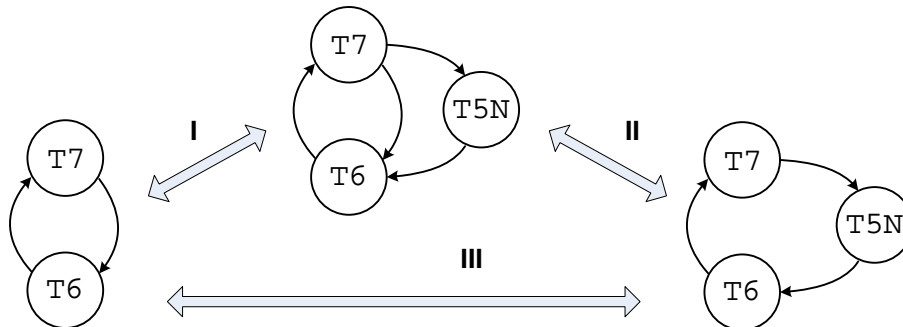


Рис. 2. Графические диаграммы, иллюстрирующие суть трёх родов TQ-бифуркаций.

3.1. Аналитическое построение карт ТQ-бифуркаций

В работах автора [21, 22] приведены вычислительно-ориентированные способы нахождения ТQ-бифуркаций символического образа динамической системы. Этот подход оправдан, когда в распоряжении исследователя есть только последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ – траектория динамики системы. Если же известна сама модель системы, в виде отображения (2.1), тогда, в большинстве случаев, предпочтительно аналитическое (численно-аналитическое) построение карт ТQ-бифуркаций в пространстве $S \times P$. Это позволяет точнее и более детально исследовать качественные свойства динамической системы с точки зрения формализма СТQ-анализа.

Определим k -ю итерацию отображения (2.1) через выражение:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{f}^k(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots \mathbf{f}(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}), \mathbf{p}), \mathbf{p}), \quad \mathbf{f}^0(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{s}_0, \quad (3.10)$$

и введём в рассмотрение величины:

$$\begin{aligned} \alpha'_k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) &= \mathbf{c}_{ss} [\mathbf{f}^k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \mathbf{f}^{k-1}(\mathbf{s}, \mathbf{p})], \\ \varphi'_{0k}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) &= \mathbf{c}_{as} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \alpha_k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \operatorname{arctg} \alpha_{k-1}(\mathbf{s}, \mathbf{p})}{2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

здесь \mathbf{c}_{ss} и \mathbf{c}_{as} имеют вид диагональных матриц.

По аналогии с (2.3) и (2.4) введём отношения:

$$\begin{aligned} T_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n &= T [\alpha_{k-1}^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \alpha_k^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \varphi_k^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p})], \\ Q_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n &= Q [T_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n, T_{k+1}^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Будем считать что отображение $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ гладкое относительно \mathbf{s} и непрерывно относительно \mathbf{p} . Пусть $B_{AS}(\mathbf{p})$ – внешняя оболочка $S_A(\mathbf{p}) \neq \emptyset$ – притягивающего множества (аттрактора) отображения (2.1), т. е. $B_{AS} = \operatorname{Conv} S_A$ и $B_{AS} \supset S_A$, а $B_{AS}^{in}(\mathbf{p})$ – внутренняя оболочка аттрактора (для иллюстрации см. рис. 3а). Разделение $B_{AS}(\mathbf{p})$ и $B_{AS}^{in}(\mathbf{p})$ вызвано рядом причин, в их числе и то, что внешняя оболочка, как правило, находится проще, нежели внутренняя.

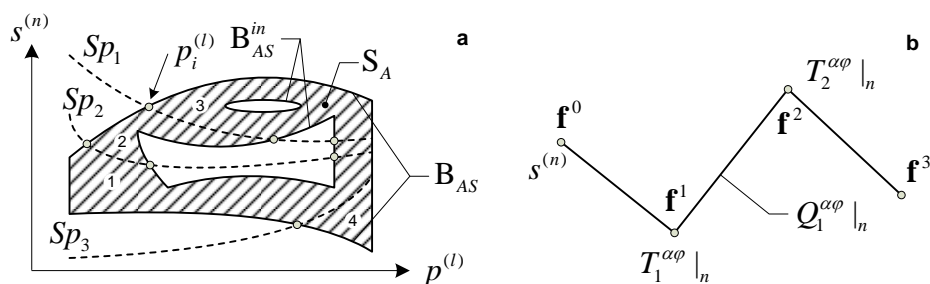


Рис. 3. (а) – иллюстрация процесса построения карт ТQ-бифуркаций ($Sp_{1,2,3}$ – сепаратрисы, определяемые уравнениями (3.13); $Sp_i^{(l)}$ – точки бифуркаций, определяемые уравнениями (3.14); цифрами 1-4 в кружках обозначены области пространства $S^{(n)} \times P^{(l)}$, гомогенные по $T^{\alpha\varphi}|_n$); (б) – иллюстрация процесса построения карт термов $T^{\alpha\varphi}|_n$ и перехода $Q^{\alpha\varphi}|_n$.

Рассмотрим три итерации отображения $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$: $k = \overline{1, 3}$ (для иллюстрации см. рис. 3б), и на их основе построим две карты термов $T_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$, $T_2^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ и одну карту перехода $Q_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$.

Как уже отмечалось в работе [22], термы $\{T_0, T_1, T_2, T_{4N}, T_{4P}\}$, для отображения вида (2.1), являются своего рода сепаратрисами разделяющими области динамики системы с качественно различной формой траекторий (см. рис. 1а). Поэтому решим уравнения ($k' = \overline{1, 2}$):

$$Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = \{\mathbf{s} : T_{k'}^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n = *\}, \quad * = T_0, T_1, T_2, T_{4N}, T_{4P}, \quad (3.13)$$

и получим набор сепаратрис $Sp_{k'}^*|_n$, разделяющих множество значений (\mathbf{s}, \mathbf{p}) на области внутри которых динамика системы (при фиксированном k') характеризуется единственным термом $T^{\alpha\varphi}|_n$. Для иллюстрации см. рис. 3а.

Для нахождения собственно точек ТQ-бифуркации решим уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k'}^*|_n &= \{\mathbf{p} : Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = B_{AS}(\mathbf{p})\}, \\ \mathbf{p}_{k'}^*|_n &= \{\mathbf{p} : Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = B_{AS}^{in}(\mathbf{p})\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Изучение карт термов $T_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n, T_2^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ и перехода $Q_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ в окрестности точки бифуркации позволяет определить характер изменений по составу термов и/или переходов, и, соответственно, определить род ТQ-бифуркации.

3.2. Логистическое отображение

В работе [22] посредством изложенного в разделе 2 подхода было численно исследовано логистическое отображение:

$$s_{k+1} = 4\lambda s_k(1 - s_k), \quad s \in (0, 1), \quad \lambda \in (0, 1], \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.1)$$

Было установлено, что справа от $\lambda_\infty = 0.892486418\dots$ – предельной точки удвоений периода [5] – форма хаотических траекторий логистического отображения существенно различна и крайне асимметрична (с позиций структуры символического ТQ-образа и величин Δ^*). Обнаружены четыре критических значения параметра λ при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траектории в пространстве $S \times K$ [22]: λ_B – среди термов Т6 и Т7 впервые появляется терм Т5, в виде субтерма Т5N; λ_{T5P} – впервые появляется субтерм Т5P; λ_{55} – впервые появляется переход Т5 \rightarrow Т5, в виде перехода Т5P \rightarrow Т5N; λ_{5P5P} – впервые появляется переход Т5P \rightarrow Т5P. Известно [5], что в точке $\lambda_{3c} = 1/4 + 1/\sqrt{2}$, в колебаниях отображения (3.1) реализуется цикл периода 3 (точка касательной бифуркации, переход к хаосу через перемежаемость). Из данных работы [22] следует, что в этот момент происходит исчезновение субтерма Т5N и перехода Т7 \rightarrow Т6, т. е. происходит ТQ-бифуркация III рода. Вопросы о механизмах этих явлений остались на тот момент без ответа. Поэтому в данной работе сделана попытка несколько прояснить ситуацию уже с привлечением методов из раздела 3.1.

На рисунке 4 показаны карты термов, которые размечены B_{AS} – внешней границей аттрактора логистического отображения. Из этих рисунков наглядно видно когда и почему появляются различные термы $T^{\alpha\varphi}|_n$ и переходы $Q^{\alpha\varphi}|_n$ в траекториях логистического отображения.

Решение уравнений пересечений сепаратрис $\{T_0, T_1, T_2, T_{4N}, T_{4P}\}$ с внешней оболочкой притягивающего множества, позволило найти также точные значений указанных выше бифуркационных значений параметра λ :

$$\begin{aligned} \lambda_{T5N} &= \lambda_B = \text{Root} [8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda - 1, 1], \\ \lambda_{T5N} &= \frac{1}{6} \left[1 + \left(19 - 3\sqrt{33} \right)^{1/3} + \left(19 + 3\sqrt{33} \right)^{1/3} \right], \\ \lambda_{T5N} &= 0.9196433776\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

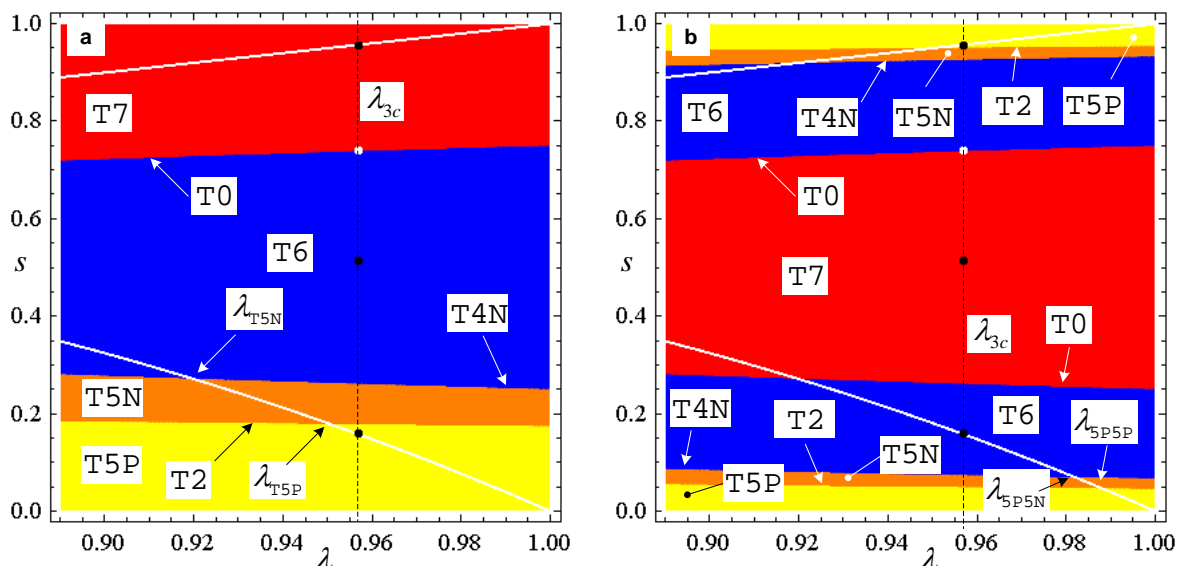


Рис. 4. Карты термов $T_1^{\alpha\varphi}(s, \lambda)$ (a) и $T_2^{\alpha\varphi}(s, \lambda)$ (b); белыми линиями показана V_{AS} ; чёрные точки – это цикл периода 3, белая точка – точка неустойчивого равновесия.

$$\lambda_{T5P} = \frac{1}{12} \left(\text{Root} \left[\lambda^8 - 108\lambda^6 + 5022\lambda^4 - 160380\lambda^2 - 570807, 2 \right] + 3 \right),$$

$$\lambda_{T5P} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + c + \sqrt{6c^{-1}\sqrt{3} - c^2 - 3} \right)^{1/2},$$

$$a = \left(\frac{2}{11 + 3\sqrt{69}} \right)^{1/3}, \quad b = 2^{2/3} \left(11 + 3\sqrt{69} \right)^{1/3}, \quad c = \sqrt{b - 10a - 1},$$

$$\lambda_{T5P} = 0.9505328097 \dots$$

$$\lambda_{5P5N} = \lambda_{55} = \text{Root} \left[128\lambda^7 - 192\lambda^6 + 32\lambda^5 + 48\lambda^4 - 8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda - 1, 1 \right],$$

$$\lambda_{5P5N} = 0.9819342504 \dots$$

$$\lambda_{5P5P} = \frac{1}{4} \left(\left[4 \text{Root} \left[\lambda^8 - 4\lambda^7 + 6\lambda^6 - 6\lambda^5 + 6\lambda^4 - 4\lambda^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2\lambda^2 - 2\lambda - 1, 2 \right] + 1 \right]^{1/2} + 1 \right),$$

$$\lambda_{5P5P} = 0.9880824703 \dots$$

Здесь функция $\text{Root}[\text{polynomial}, \text{the root number}]$ – стандартная функция системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Важность результатов (3.2) – (3.5) состоит в том, что они позволяют уточнить обнаруженные в работе [22] нетривиальные закономерности первого появления термов $T^{\alpha\varphi}|_n$ и переходов $Q^{\alpha\varphi}|_n$ в логистическом отображении, увязанные на константу Фейгенбаума [5], определяющей масштабный фактор бифуркаций удвоения периодов для квадратичных отображений.

Данные приведенные на рисунке 4 наглядно иллюстрируют недостаточность изучения областей пересечения сепаратрис только с внешней оболочкой аттрактора. Так

при $\lambda = \lambda_{3c}$ у отображения (3.1) существует устойчивый цикл периода 3 и реализуется переход к хаосу через перемежаемость. В точке касательной бифуркации, где реализуется переход: «хаос» \Leftrightarrow «цикл периода 3», также происходит ТQ-бифуркация III-го рода, см. рис. 4, но её обнаружение возможно лишь при изучении областей пересечения сепаратрис с V_{AS}^{in} – внутренней оболочкой аттрактора.

4. Т-синхронизация хаотических колебаний

4.1. Общая идея и интегральный коэффициент Т-синхронности

Синхронизация – принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса, оно широко распространено в природе, науке, технике и в обществе [27]. Одно из важных проявлений этого феномена – это синхронизация хаотических колебаний [28]. Данное явление экспериментально наблюдалось в различных физических приложениях (см. [3, 27–29] и приведённые там ссылки): радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного явления является весьма важным также с точки зрения его применения к передаче информации [30], криптографическому шифрованию [31] с помощью детерминированных хаотических колебаний и к квантовым вычислениям [29, 32].

Синхронизация хаотических колебаний подразделяется на следующие основные виды: обобщённая [33]; полная [34]; противофазная [35]; с запаздыванием [36]; частотная [37]; фазовая [38]; на уровне временных масштабов [39]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны, на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а, с другой – поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные.

В данной работе изложен, впервые представленный в работе автора [23], новый подход к оцениванию и анализу синхронизации хаотических систем в аспекте форм их траекторий в расширенном пространстве фазовых переменных. Забегая вперёд отметим, что предложенный метод исследования синхронизации, основанный на Т-символьном представлении, позволяет анализировать синхронизацию в сложных ансамблях сильно нестационарных и неидентичных осцилляторов больших размерностей с произвольной конфигурацией и топологией сети (решётки). Далее, для определённости изложения, под n -й компонентой последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ будем понимать некую фазовую переменную некоей n -й динамической системы. Кроме того, положим, что с k -м отсчётом связан момент времени t_k , $t_k \in T \subset \mathbb{R}$.

Итак, введём определение.

Определение 2. Компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ являются Т-синхронными по отсчёту k , если для соответствующей ей последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$ выполняется равенство $J_{sym}^{\alpha\varphi} [T_k^{\alpha\varphi}] = 1$, где

$$J_{sym}^{\alpha\varphi} [T_k^{\alpha\varphi}] = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Таким образом, анализируемые, на предмет Т-синхронизации, конфигурации систем и их фазовых переменных определяются схемой комплектования n -х компонент в последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ и структурой равенства в функции (4.6).

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [35] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных: $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$. В этом случае для n -й системы замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ в k -м отсчёте происходит по схеме приведённой в таблице 1. Каждый вариант инвертирования обозначим номером m , $m = \overline{1, 2^{N-1}}$.

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [36]. Для её обнаружения необходимо подвигать относительно друг друга фазовые траектории систем:

$$\{T_k^{\alpha\varphi}|_1 \rightarrow T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \rightarrow T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N\}. \quad (4.7)$$

Причём на значения сдвигов наложены ограничения: $0 \leq h_n \ll K$.

Так как противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, то при расчёте частного интегрального коэффициента синхронности учтём это обстоятельство:

$$\delta_{m,\mathbf{h}}^{\alpha\varphi} = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J[T_k^{\alpha\varphi}|\{m, \mathbf{h}\}], \quad (4.8)$$

где: $k^* = 1 + \max(h_1, \dots, h_N)$, $K^* = K + \min(h_1, \dots, h_N)$.

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^{\alpha\varphi} = \max_m \max_{\mathbf{h}} \delta_{m,\mathbf{h}}^{\alpha\varphi}, \quad 0 \leq \delta^{\alpha\varphi} \leq 1, \quad (4.9)$$

т. е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые, в совокупности, доставляют максимальное количество отсчётов k в последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$, отвечающих условию $J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] = 1$.

Важно отметить, что предлагаемый анализатор синхронности оценивает уровень полной синхронизации [34], обнаруживает противофазную [35] и лаг-синхронизацию [36] именно в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$, так как это следует из условия синхронизации $J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] = 1$. Но по смыслу символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ полная синхронизация на уровне отсчётов $T_k^{\alpha\varphi}$ не есть полная синхронизация на уровне \mathbf{s}_k – отсчётов самой последовательности. Поэтому появляется потенциальная возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщённой синхронизации [33].

4.2. Временная структура

Введённая через (4.9) величина $\delta^{\alpha\varphi}$ характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени $t_K - t_1$. Но зачастую исследователя может интересовать временная структура синхронизации систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [24, 25]. Поэтому введём понятие *синхронного домена*.

Определение 3. *Синхронный домен SD – это совокупность отсчётов последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$, для которых справедливо условие:*

$$SD_r : \left\{ \begin{aligned} J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k'}^{\alpha\varphi}] = 1, J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k^-}^{\alpha\varphi}] = 0 \vee k^- = 0, \\ J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k^+}^{\alpha\varphi}] = 0 \vee k^+ = K + 1 \end{aligned} \right\}, \quad (4.10)$$

где $k' = \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r^{SD}}$, $k^- = b_r^{SD} - 1$, $k^+ = b_r^{SD} + L_r^{SD} + 1$, r – номер домена, $r = \overline{1, R^{SD}}$, причём $R^{SD} \leq (K + 1) \operatorname{div} 2$.

Таким образом домен SD_r описывается двумя параметрами: b_r^{SD} – моментом появления и L_r^{SD} – длиной, причём $L_r^{SD} \leq K$.

Для описания временной структуры синхронизации систем рассчитаем функцию спектральной плотности синхронных доменов SD :

$$H^{SD} [L^{SD}] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L_r^{SD}, L^{SD}], \quad (4.11)$$

где $\delta[o, o]$ – символ Кронекера, $L^{SD} = \overline{1, K}$. Дополнительно определим E_{cnd}^{SD} – условную энтропию структуры синхронных доменов, при $\delta^{\alpha\varphi} > 0$:

$$E_{cnd}^{SD} = - \sum_{i=1}^K P^{SD} [i] \ln P^{SD} [i], \quad P^{SD} [L^{SD}] = \frac{H^{SD} [L^{SD}]}{\sum_{i=1}^K H^{SD} [i]}. \quad (4.12)$$

Отметим, что энтропия E_{cnd}^{SD} минимальна ($E_{cnd}^{SD} = 0$) – когда спектр $H^{SD}[L^{SD}]$ – вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ($E_{cnd}^{SD} = \hat{E}_{cnd}^{SD}$) – в случае равномерного гребёчатого спектра $H^{SD}[L^{SD}]$ с предельным числом различных длин доменов синхронизации равном W :

$$W = \left\lfloor \frac{\sqrt{17 + 8 \delta^{\alpha\varphi} K} - 3}{2} \right\rfloor, \quad \hat{E}_{cnd}^{SD} = \ln W, \quad (4.13)$$

где $[a]$ – целая часть a . Результат для \hat{E}_{cnd}^{SD} получен в виде доказанного утверждения.

Если перед исследователем стоит задача сравнить случаи синхронизации различающиеся величинами $\delta^{\alpha\varphi}$ и/или K , то вместо E_{cnd}^{SD} необходимо оперировать величиной

$$\Delta_E = \frac{E_{cnd}^{SD}}{\hat{E}_{cnd}^{SD}}. \quad (4.14)$$

Для наглядного рассмотрения временной структуры процесса синхронизации систем в пространстве $S \times K$ построим карту синхронизации:

$$M_k^{SD} = \begin{cases} L_r^{SD} & b_r^{SD} \leq k \leq b_r^{SD} + L_r^{SD}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Отметим, что карта M^{SD} осуществляет переход от представления структуры синхронизма в SD непосредственно в пространство K . Дальнейший спуск в пространство T должен учитывать возможную неэквидистантность последовательности $\{t_k\}_{k=1}^K$.

4.3. О проверке T-синхронности на не случайность

Чтобы оценить не случайность зарегистрированной синхронизации, между исследуемыми системами, необходимо найти статистически значимые различия [40, 41] (по тем или иным параметрам, интересующим исследователя) между T_s – изучаемой и T_ξ – опорной последовательностями символов $T^{\alpha\varphi}$. Последовательность T_ξ должна иметь заведомо независимые компоненты n , и быть статистически эквивалентной последовательности T_s по частотам (вероятностям) встречаемости символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ и переходов между ними $Q^{\alpha\varphi}|_n$, при $t_k \rightarrow t_{k+1}$.

Введём в рассмотрение величину α – уровень значимости – допустимую вероятность ошибки первого рода [40, 41]. Сформулируем основную гипотезу \mathcal{H}_0 – что зафиксированные параметры и характеристики синхронизации для изучаемой последовательности T_s на самом деле являются не следствием синхронного поведения систем, а определяется случайным стечением обстоятельств (случайным совпадением подпоследовательностей у независимых компонент анализируемой последовательности). В этом случае опорная последовательность T_ξ формирует критические области для гипотезы \mathcal{H}_0 по тем или иным параметрам и характеристикам синхронизации.

4.4. Исследование системы Рёсслера

В качестве примера рассмотрим T -синхронизацию фазовых переменных в системе Рёсслера находящейся в режимах ленточного (band-type) $r = r_b = 4.4$ и винтового (screw-type) $r = r_s = 12$ хаоса [7, 42–44]:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r). \tag{4.16}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные; $p = 0.2, q = 0.1, r$ – параметры системы. Выбор объекта исследования обусловлен тем, что система Рёсслера хорошо изучена и является эталонным объектом нелинейной и хаотической динамики. При этом анализ характеристик символической синхронизации между переменными $x(t), y(t)$ и $z(t)$ возможно трактовать двояко. Либо как изучение формы аттрактора системы (4.16) [7], либо как исследование синхронизации сильно связанных структурно неидентичных систем [28] (см. схему на рис. 5а).

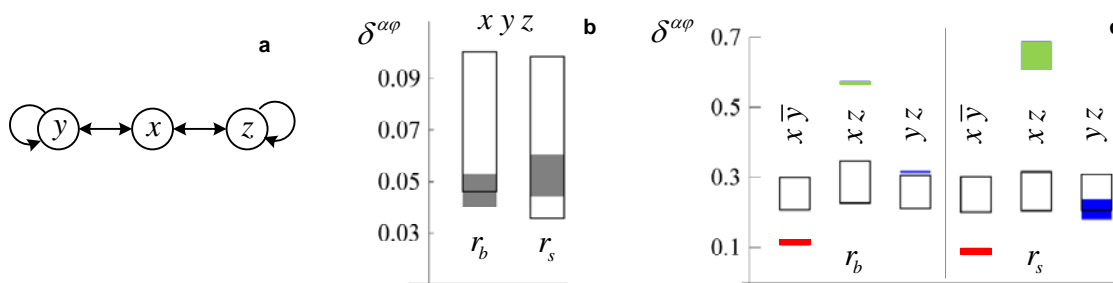


Рис. 5. (а) – структура системы (4.16); (б) и (с) – зависимость $\delta^{\alpha\varphi}$ от параметра r , соответственно для комбинаций 3-х и 2-х фазовых переменных; прямоугольниками обозначены: закрашенными – интервал значений $\delta^{\alpha\varphi}$ для системы (4.16) с границами по вероятности $1 - \alpha$, пустыми – критическая область для гипотезы \mathcal{H}_0 по опорной последовательности T_ξ ; инвертированная переменная в комбинации обозначается штрихом $\bar{}$.

Численное интегрирование системы (4.16) проводилось методом Dormand–Prince 5-го порядка на интервале времени $T = [0, 8 \times 10^3]$, с шагом $\Delta t = 1 \times 10^{-2}$. Для каждого значения параметра r рассчитывалось 10^3 траекторий с начальными условиями $x_0 = \xi_1 \in [-7, 7], y_0 = \xi_2 \in [-7, 7], z_0 = \xi_3 \in [0, 15]$, где ξ_{1-3} – некоррелированные равномерно распределённые случайные величины. Это позволило свести к минимуму эффект памяти на траекториях системы, индуцированный начальными условиями. Для каждой n -й фазовой переменной на интервале $T' = [7, 8] \times 10^3$ порождалась последовательность $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$, длиной $K = 10^5$, посредством стробоскопического преобразования Пуанкаре [3]. Подобный сдвиг от $t = 0$ объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Лаг-синхронизация не рассматривалась

($h_n = 0$). Критические области для гипотезы \mathcal{H}_0 , строились как двусторонние, с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$ [40, 41]. Построение критических областей производилось по эмпирическим функциям распределения рассчитываемых характеристик. Опорные последовательности T_ξ символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ генерировались как однородные марковские цепи. Параметры цепей: исходные абсолютные вероятности состояний и переходные вероятности, определялись из соответствующих последовательностей $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$. Интервалы значений случайных величин (параметров синхронизации) для системы (4.16) формировались с границами по вероятности $1 - \alpha$. Доверительные интервалы строились как классические с доверительной вероятностью равной $1 - \alpha$.

Из данных рисунков 5b и 5c следует, что из всех возможных комбинаций фазовых переменных системы Рёсслера, наибольшим интегральным уровнем синхронизации, статистически превосходящим таковой для опорной последовательности (в обоих хаотических режимах), обладает пара переменных x и z :

$$\begin{aligned} M[\delta^{\alpha\varphi}]|_{r_b} &\approx 0.570, & D[\delta^{\alpha\varphi}]|_{r_b} &\approx 1.542 \times 10^{-6} \\ M[\delta^{\alpha\varphi}]|_{r_s} &\approx 0.643, & D[\delta^{\alpha\varphi}]|_{r_s} &\approx 1.606 \times 10^{-4}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В режиме ленточного хаоса ($r = r_b$) также статистически значима синхронность переменных y и z , хотя прямой связи между ними в системе (4.16) нет (см. рис. 5a). Тем не менее, уровень синхронности пары y, z превосходит таковой для пары x, y , через которую осуществляется связь, и чьё значение величины $\delta^{\alpha\varphi}$ статистически ниже чем для опорной последовательности, причём в обоих исследованных режимах. Отметим, что эта же пара, единственная, которая синхронизируется в противофазе (как при $r = r_b$, так и при $r = r_s$). Изучение механизма этого эффекта – предмет наших дальнейших исследований.

Известно [7, 43, 44], что режим винтового хаоса ($r = r_s$) является более развитым (в аттракторе системы присутствуют гомоклинические орбиты Шильникова [1, 8]), нежели режим ленточного хаоса ($r = r_b$). Однако, данные рисунка 5c указывают на то, что при $r = r_s$, система (4.16) по переменным x и z более синхронна, нежели при $r = r_b$. Правда в режиме винтового хаоса увеличивается дисперсия величины $\delta^{\alpha\varphi}$, что можно трактовать как снижение, в этом режиме, структурной устойчивости процесса синхронизации фазовых переменных x и z относительно смены начальных условий. Остальные пары при переходе к режиму развитого хаоса снижают свой уровень синхронизации. Уровень $\delta^{\alpha\varphi}$ всех трёх переменных (x, y и z) попадает в критическую область опорной последовательности, поэтому рассматривать эту конфигурацию не имеет смысла.

Анализ спектральной плотности синхронных доменов для пары x, z (см. рис. 6), показывает наличие нескольких особенностей: для режима r_b – трёх превалирующих длин доменов (L_{b1}^{SD} , L_{b2}^{SD} и L_{b3}^{SD}), и окна L_{bw}^{SD} – в диапазоне длин которого происходит существенное и стабильное снижение количества доменов; для режима r_s – также трёх превалирующих длин доменов (L_{s1}^{SD} , L_{s2}^{SD} и L_{s3}^{SD}). При интерпретации этого факта имеет смысл вновь обратиться к условиям численного эксперимента: для обоих режимов интегрирование системы (4.16) велось с постоянным шагом во времени, переходной процесс из рассмотрения исключался, результаты обобщались на множестве начальных условий. Следовательно, обнаруженные особенности – результат перестройки структуры аттрактора, вызванный скорее внутренними причинами, нежели условиями эксперимента. В целом $\max L^{SD}|_{r_b} = 227$, а $\max L^{SD}|_{r_s} = 307$, что указывает на не случайный характер повышения синхронности между фазовыми переменными x и z в системе Рёсслера в режиме более развитого хаоса. Усиливает этот факт также снижение, по переменным x и z , среднего значения и дисперсии величины Δ_E – нормированной условной

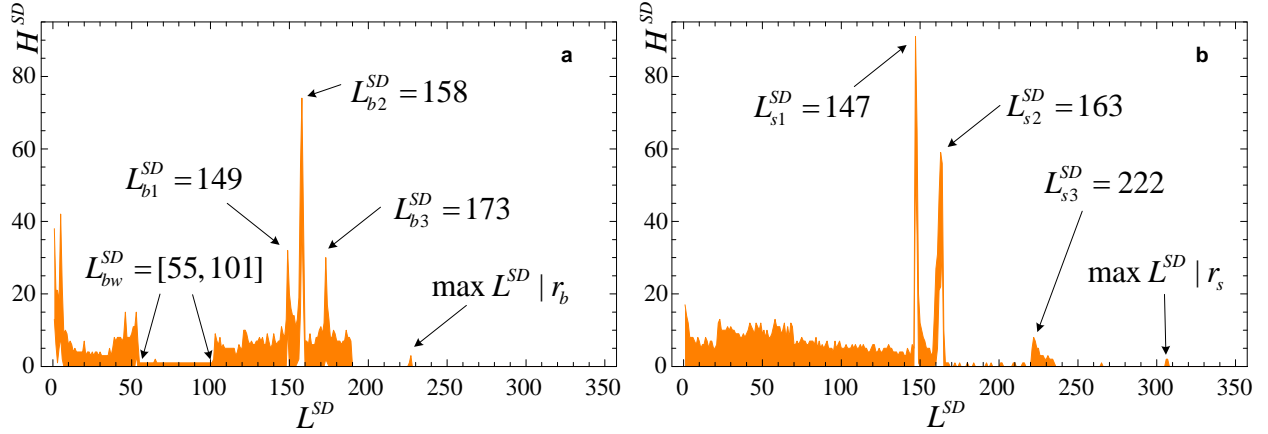


Рис. 6. Зависимость H^{SD} от L^{SD} для пары x, z : (а) – $r = r_b$ и (б) – $r = r_s$; (цветом заполнен интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$).

энтропии структуры синхронных доменов (см. рис. 7b):

$$\begin{aligned} M[\Delta_E]|r_b &\approx 0.6915, & D[\Delta_E]|r_b &\approx 1.528 \times 10^{-4}, \\ M[\Delta_E]|r_s &\approx 0.6797, & D[\Delta_E]|r_s &\approx 4.427 \times 10^{-5}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

т. е. временная структура синхронизации становится более вырожденной (упорядоченной) и более грубой относительно смены начальных условий в системе. Примечательно, что не смотря на увеличение уровня синхронизации, условная энтропия E_{cnd}^{SD} также снижается в случае более развитого хаоса (см. рис. 7а).

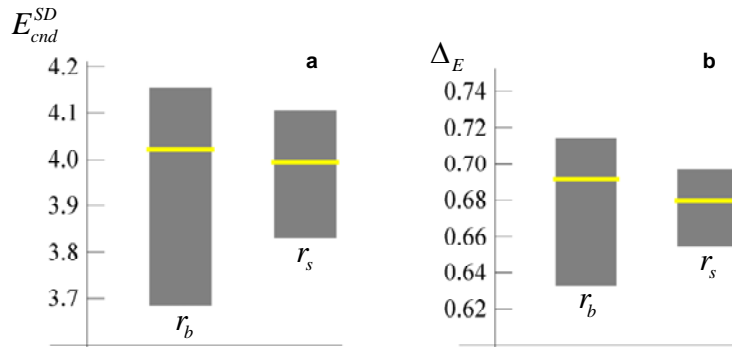


Рис. 7. Значения E_{cnd}^{SD} (а) и Δ_E (б) для пары x, z , при $r = r_b$ и $r = r_s$; внешние прямоугольники – интервалы значений для самих величин с границами по вероятности $1 - \alpha$, внутренние – доверительные интервалы для их математических ожиданий (доверительная вероятность равна $1 - \alpha$).

Изучение карт синхронизации M^{SD} , в привязке к фазовым портретам системы (4.16), демонстрирует любопытный факт (см. рис. 8): зоны синхронизации ($M^{SD} \geq 1$) переменных x и z не размазаны по аттрактору, а локализованы на нём в достаточно компактные и плотные области. Причём зоны синхронизации расположены как у основания аттрактора (плоскость xOy) так и на его возвышении – ближе к вершущке.

Таким образом, из полученных результатов следует, что в хаотических режимах динамические переменные системы Рёсслера имеют ненулевой уровень и неслучайный характер синхронизации с позиции формы траектории в расширенном фазовом пространстве. Причём в случае винтового хаоса (более развитого) уровень синхронизации

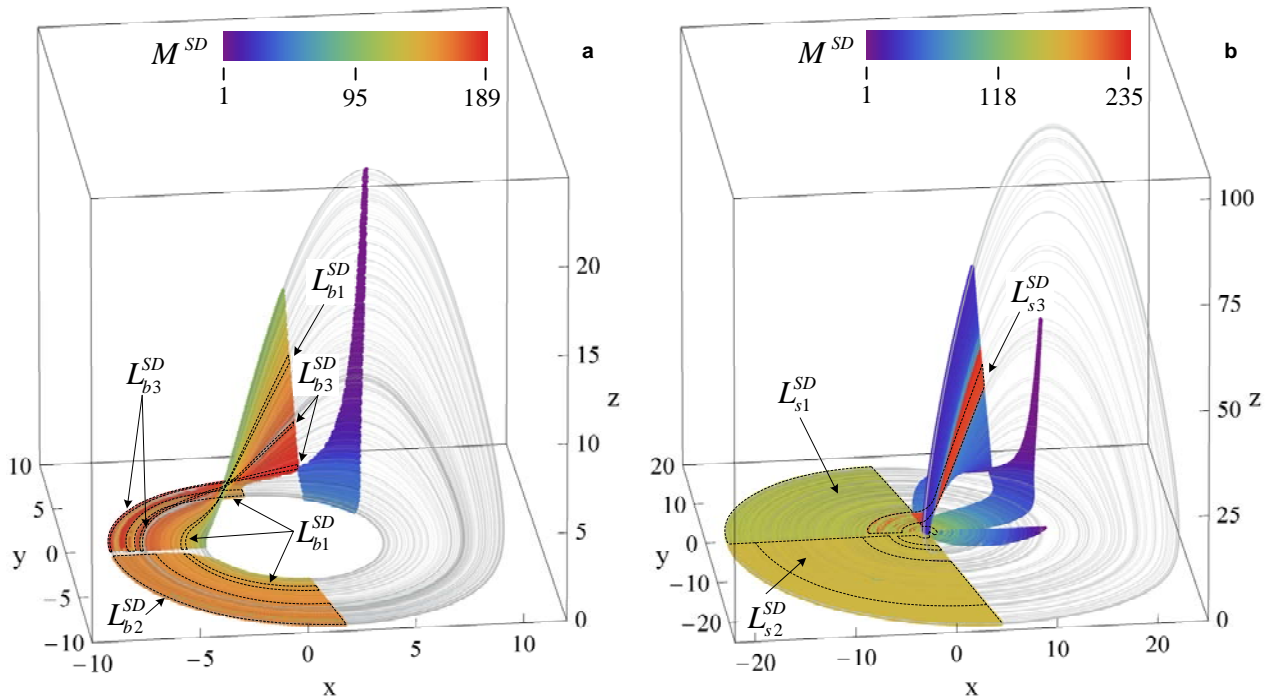


Рис. 8. Расположение зон синхронизации $M^{SD} \geq 1$ переменных x и z на фазовых портретах системы Рёсслера: (а) – $r = r_b$ и (б) – $r = r_s$.

для переменных x и z даже выше – за счёт большего количества более длинных участков синхронного поведения. Локализованное расположение этих участков на фазовом аттракторе говорит в пользу наличия специфических детерминированных механизмов подобной самоорганизации. Полученная информация потенциально может оказаться полезной при изучении вопросов подавления хаоса в системе Рёсслера посредством малых внешних воздействий [44].

5. Заключение

В настоящей работе описан новый подход к символическому анализу многомерных вещественных последовательностей и дискретных отображений, оперирующий понятием форма траектории в пространстве $S \times K$ – так называемый символический СТQ-анализ. Предложенный формализм основан на минимальном конечном алфавите и свободен от некоторых недостатков символического анализа на основе «классических» алфавитов с разбиением пространств S или \dot{S} . Необходимо отметить, что предложенный способ исследования свойств динамических систем ни в коем случае не является заменой классических символических анализаторов и не умаляет их достоинств, напротив, он органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на исследуемую систему с несколько иной точки зрения.

Сильнейший плюс методов СТQ-анализа – изначальная нацеленность на многомерность и нестационарность исследуемых процессов и систем, к том числе сложных ансамблей неидентичных осцилляторов больших размерностей с произвольной конфигурацией и топологией сети (решётки). Кроме того, изложенный подход может быть применён для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует, в обязательном порядке, каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Подобные свойства

СТQ-анализа несомненно способствуют возможности его конструктивного применения для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими, физиологическими, биологическими, финансовыми и другими сложными системами.

В рамках описываемого подхода создан ряд аналитических характеристик позволяющих, уже на данном этапе разработки, достаточно полно исследовать структуру аттракторов динамических систем. Ключевую роль в СТQ-анализе играет символический образ Γ^{TQ} , кодирующий форму траектории динамического процесса. С качественным изменением структуры графа Γ^{TQ} связано понятие TQ-бифуркации, которая вскрывает структурную перестройку динамики системы. В будущем предполагается расширить информативные возможности символического анализатора через определение энтропийных (размерностных) и марковских характеристик для последовательностей $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$ и $\{Q_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$ и их подпоследовательностей. Это позволит расширить спектр соответствий между свойствами символического образа Γ^{TQ} , свойствами траектории $\{s_k\}_{k=1}^K$ в пространстве $S \times K$ и существенными свойствами самой динамической системы (2.1), важными в аспекте её идентификации, предсказания эволюции и управления динамикой.

Формализм СТQ-анализа позволил определить новый способ синхронизации хаотических колебаний, так называемую T-синхронизацию. Предложенный метод, в отличие от большинства других, позволяет количественно оценивать и изучать не только интегральный уровень синхронизации хаотических систем, но и временную структуру их синхронизма (через введённое понятие «синхронный домен»), позволяя обнаруживать и изучать факт перестройки структуры аттракторов и перемежаемое поведение.

В работе приведены примеры демонстрирующие некоторые возможности символического СТQ-анализа. В плане расширения областей его применения – это согласованный анализ структурных характеристик ЭЭГ в нейрофизиологии и задачи управления хаотической динамикой и подавления хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий.

Таким образом, представляется, что формализм СТQ-анализа потенциально способен исследовать с единых позиций новые типы и механизмы синхронизации, самоорганизации и управления в нелинейных системах с хаотической динамикой. А результаты подобного исследования возможно будут способствовать продвижению в понимании ряда фундаментальных вопросов о ключевых внутренних свойствах нелинейных динамических систем, лежащих в основе исследуемых феноменов.

Список литературы

1. Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса // УФН, 2010, **180** (12), 1305–1329.
2. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории // М.: Физматлит, 1995.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН, 2011, **181** (2), 121–149.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика // Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
5. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике // Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // УФН, 2005, **175** (2), 163–179.
7. Gilmore R., Lefranc M. The topology of chaos // Wiley-Interscience, 2002.
8. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике // (Том 1, ИКИ, Ижевск, 2004), (Том 2, РХД, Ижевск, 2009).

9. *Алексеев В.М.* Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа // Изд-во Ин-та Математики АН УССР, Киев, 1976.
10. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* К вопросу об определении хаоса // УМН, 2009, **64** (4), 125–172.
11. *Бойэн Р.* Методы символической динамики // Сб. статей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.
12. *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems // Springer-Verlag, N.Y., 1987.
13. *Dellnitz M., Hohmann A.* A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors // Numerische Mathematik, 1997, **75** (3), 293–317.
14. *Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б.* Введение в символический анализ динамических систем // Изд-во СПбГУ, 2005.
15. *Balakrishnan G., Shoeb A., Syed Z.* Creating symbolic representations of electroencephalographic signals: An investigation of alternate methodologies on intracranial data // Annual International Conference of the IEEE, EMBC, 2010, 4683–4686.
16. *Keller K., Lauffer H.* Symbolic analysis of high-dimensional time series // Int. J. Bifurcation Chaos, 2003, **13** (9), 2657–2668.
17. *Douglas L., Brian M.* An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding // Cambridge University Press, 1996.
18. *Pichl L., Yamano T., Kaizoji T.* On the Symbolic Analysis of Market Indicators with the Dynamic Programming Approach // Lecture Notes in Computer Science, 2006, **3973**, 432–441.
19. *Alur R., Henzinger T.A., Wong-Toi H.* Symbolic analysis of hybrid systems // Decision and Control, 1997, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997, **1**, 702–707.
20. *Porta A., D’Addio G., Pinna G.D., Maestri R., Gnechhi-Ruscione T., Furlan R., Montano N., Guzzetti S., Malliani A.* Symbolic analysis of 24h holter heart period variability series: comparison between normal and heart failure patients // Proceedings of the IEEE Conference on Computers in Cardiology, 2005, **32**, 575–578.
21. *Макаренко А.В.* Символический анализ в пространстве «скорость-кривизна» структуры хаоса в режиме синхронизации // Письма в ЖТФ, 2012, **38** (4), 1–9.
22. *Макаренко А.В.* Символический анализ в пространстве «скорость-кривизна» многомерных динамических процессов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, **52** (7), 1248–1260.
23. *Макаренко А.В.* Мера синхронности многомерных хаотических последовательностей на основе их символического представления в Т-алфавите // Письма в ЖТФ, 2012, **38** (17), 53–60.
24. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды // ГосУНЦ «Колледж», Саратов, 2005.
25. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // УФН, 1987, **152** (5), 3–32.
26. *Макаренко А.В.* Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии // Изв. вузов. ПНД, 2006, **14** (4), 71–86.
27. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences // Cambridge University Press, 2001.
28. *Voccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // Physics Reports, 2002, **366** (1–2), 1–101.
29. *Аргонов В.Ю., Пранц С.В.* Синхронизация и бифуркации внутренних и внешних степеней свободы атома в стоячей световой волне // Письма в ЖЭТФ, 2004, **80** (4), 260–264.
30. *Суото К.М., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett., 1993, **71** (1), 65–68.
31. *Larger L., Goedgebuer J.-P.* Encryption using chaotic dynamics for optical telecommunications // C.R. Physique, 2004, **5** (6), 609–611.
32. *Planat M.* On the Cyclotomic Quantum Algebra of Time Perception // Neuroquantology, 2004, **2** (4), 292–308; arXiv:quant-ph/0403020.
33. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E, 1996, **53** (5), 4528–4535.

34. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett., 1990, **64** (8), 821–824.
35. Liu W., Qian X., Yang J., Xiao J. Antisynchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Lett. A, 2006, **354** (1–2), 119–125.
36. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators // Phys. Rev. Lett., 1997, **78** (22), 4193–4196.
37. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ, 1988, **14** (6), 569–573.
38. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos, 2000, **10** (10), 2291–2306.
39. Короновский А.А., Храмов А.Е. Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖЭТФ, 2004, **79** (7), 391–395.
40. Леман Э. Проверка статистических гипотез // М: Наука, 1979. (*Lehmann E.L.* // Testing statistical hypotheses, Wiley and Sons, 1970.)
41. Худсон Д. Статистика для физиков // М: Мир, 1970. (*Hudson D.J.* // Statistics, CERN, Geneva, 1964.)
42. Rossler O.E. An equation for continuous chaos // Physics Letters A, 1976, **57** (5), 397–398.
43. Rossler O.E. Chaos in abstract kinetics: Two prototypes // Bulletin of Mathematical Biology, 1977, **39** (2), 275–289.
44. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Чернышов Н.Ю. Стабилизация хаоса в системе Ресслера импульсным и гармоническим сигналом // Изв. вузов. ПНД, 2010, **18** (4), 3–16.

Макаренко Андрей Викторович,
канд. техн. наук,
рук. научно-исследовательской группы
«Конструктивная Кибернетика»,
e-mail: avm.science@mail.ru

Поступила 14 июля 2012