PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq, 05.45.Tp

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ТЕРМИНАХ СИМВОЛИЧЕСКОГО CTQ-АНАЛИЗА

Макаренко А.В.

Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»
101000, Москва, а/я 560

Институт проблем управления РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

e-mail: avm.science@mail.ru

Рассмотрено применение символического CTQ-анализа для исследования синхронизации хаотических колебаний. Существенным отличием настоящего подхода от аналогов является его способность диагностировать и количественно измерять характеристики режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем и таким образом изучать временную структуру синхронизации. В работе впервые демонстрируется применение аппарата символического анализа на основе T-алфавита к системам с фазовой синхронизацией и синхронизацией временных масштабов. В качестве примера выбран достаточно сложный случай: система из двух взаимно связанных неидентичных осцилляторов Рёсслера, находящихся в режиме винтового хаоса и имеющих аттракторы с плохо обусловленной фазой. Из совокупности полученных результатов следует, что рассмотренный метод позволяет устойчиво диагностировать синхронизм ранее, нежели обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации и/или синхронизации временных масштабов.

Keywords: T-синхронизация, фазовая синхронизация, структура, хаос, топология.

Введение

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространён в природе, науке, технике и в обществе [1]. Одно из важных проявлений этого явления – это синхронизация хаотических колебаний, которая экспериментально наблюдалась в различных физических приложениях (см. [1, 2, 3, 4, 5] и приведённые там ссылки): радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного явления является весьма важным также с точки зрения его применения к передачи информации [6] и к криптографическому шифрованию [7] с помощью детерминированных хаотических колебаний, к квантовым вычислениям [3, 8].

Синхронизация хаотических колебаний объединяет под собой несколько различных видов [2]: обобщённая [9], полная [10], противофазная [11], с запаздыванием [12], частотная [13], фазовая [14], синхронизация временных масштабов [15]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее, продолжаются активные исследования, направленные, с одной стороны – на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а с другой – на поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные.

Несмотря на продолжительную историю изучения синхронизации хаотических колебаний, множество важных вопросов в данной области остаются нерешёнными. В их числе и количественное исследование временной структуры синхронизации динамических систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16, 17]. Отметим, что исследование структуры синхронизма [18] имеет как теоретическую значимость для самой нелинейной динамики [19], так и прикладное значение, например, в вопросах биологии и медицины [20, 21], стохастической финансовой математики [22] и т.д. Тем не менее, при всей актуальности проблематики исследования временной структуры синхронизации нелинейных систем, продвижение по этому вопросу, весьма слабое. Причины сложившейся ситуации достаточно подробно рассмотрены в работе [18].

С целью решения проблем, связанных с диагностикой и количественным измерением характеристик временной структуры синхронизации хаотических колебаний, автором был предложен оригинальный метод исследования синхронизма на основе символического CTQ-анализа (аббревиатура CTQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: C, T и Q) [23, 24]. Необходимо отметить, что символическая динамика, при всей своей кажущейся внешней простоте, является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [25, 26]. Она позволяет исследовать такие сложные явления в системах как: хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость, и т.п. (см., например, [25, 26, 27, 28] и приведённые там ссылки).

В рамках предложенного символического анализа синхронизация хаотических колебаний исследуется через так называемую T-синхронизацию [29, 30], увязанную на инвариантные характеристики формы траекторий динамических систем в расширенном пространстве состояний. Разработанные меры позволяют диагностировать и количественно измерять характеристики режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем, т.е. изучать временную структуру синхронизации нелинейных систем [18].

Конструктивность подхода на основе анализа T-синхронизации хаотических колебаний была продемонстрирована автором на ряде модельных и реальных систем [18, 29, 30, 31, 32]. В настоящей статье впервые демонстрируются возможности метода при анализе фазовой синхронизации [14] и синхронизации временных масштабов [15]. Причём в качестве изучаемого примера намеренно выбрана система из двух неидентичных осцилляторов Рёсслера [33] с плохо обусловленной фазой, в которой прямая диагностика фазовой синхронизации затруднена [34].

2. Определение T-синхронизации хаотических систем

Введём в рассмотрение траекторию динамической системы, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда): $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$, где фазовая переменная $\mathbf{s}$ системы имеет размерность N, а траектория состоит из K временных отсчётов. При этом каждому k-му отсчёту может быть сопоставлен момент времени t_k.

Определим исходное отображение, кодирующее, в терминах конечного T-алфавита [23, 24], форму n-й компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$:

$$\left\{\mathbf{s}_{k-1}^{(n)},\mathbf{s}_{k}^{(n)},\mathbf{s}_{k+1}^{(n)}\right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}\big|_n,\; T_k^{\alpha\varphi} = \left[T_k^{\alpha\varphi}\big|_1,\ldots,T_k^{\alpha\varphi}\big|_N\right]. \quad (1)$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}\big|_n$ для k-го отсчёта и n-й фазовой переменной, приведены на рисунке 1.

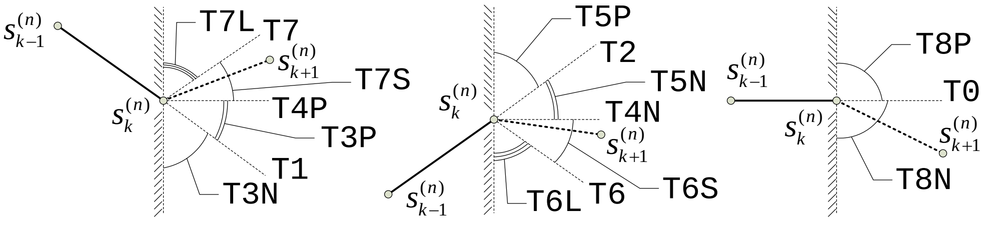

Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}\big|_n$ для k-го отсчёта и n-й фазовой переменной.

Строго, отображение (1) задаётся через соотношения:

$$
\begin{array}{llll}
\mathtt{T0} & \Delta s_- = \Delta s_+ = 0; & \mathtt{T6S} & \Delta s_- > 0,\ \Delta s_+ < 0,\ \Delta s_+ > -\Delta s_-; \\
\mathtt{T1} & \Delta s_- = \Delta s_+ < 0; & \mathtt{T6} & \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0; \\
\mathtt{T2} & \Delta s_- = \Delta s_+ > 0; & \mathtt{T6L} & \Delta s_- > 0,\ \Delta s_+ < 0,\ \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\
\mathtt{T3N} & \Delta s_- < 0,\ \Delta s_+ < \Delta s_-; & \mathtt{T7S} & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ > 0,\ \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\
\mathtt{T3P} & \Delta s_- < 0,\ \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; & \mathtt{T7} & \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0; \\
\mathtt{T4N} & \Delta s_- > 0,\ \Delta s_+ = 0; & \mathtt{T7L} & \Delta s_- < 0,\ \Delta s_+ > 0,\ \Delta s_+ > -\Delta s_-; \\
\mathtt{T4P} & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ = 0; & \mathtt{T8N} & \Delta s_- = 0,\ \Delta s_+ < 0; \\
\mathtt{T5N} & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ < \Delta s_-; & \mathtt{T8P} & \Delta s_- = 0,\ \Delta s_+ > 0; \\
\mathtt{T5P} & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; & &
\end{array} \tag{2}
$$

здесь $\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}$ и $\Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}$.

Таким образом, Т-алфавит включает в себя следующее множество символов:

$$
\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi} = \{\mathtt{T0}, \mathtt{T1}, \mathtt{T2}, \mathtt{T3N}, \mathtt{T3P}, \mathtt{T4N}, \mathtt{T4P}, \mathtt{T5N}, \mathtt{T5P}, \mathtt{T6S}, \mathtt{T6}, \mathtt{T6L}, \mathtt{T7S}, \mathtt{T7}, \mathtt{T7L}, \mathtt{T8N}, \mathtt{T8P}\}. \tag{3}
$$

Как видно из (3) символ $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде $\mathtt{T}i$, где i – это правая часть кодов символов алфавита $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $\mathtt{T}i_1 \cdots i_N$, см. (1). Полный алфавит $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi} | N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ в целом, состоит из 17^N символов.

Предположим теперь, что временная последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ размерностью N формируется за счёт объединения фазовых переменных N одномерных динамических систем, т.ё. $\mathbf{s}_k^{(n)}$ – это значение фазовой переменной n-й системы в k-й момент времени. Данное предположение введено исключительно для простоты объяснения идеи, и оно ни в коем случае не приводит к потере общности.

Будем считать динамические системы синхронными в момент времени k, в смысле Т-синхронизации [18, 29, 30], если выполняется условие $J_k = 1$, где:

$$
J_k = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \ldots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \ldots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{4}
$$

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [11] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных: $\mathbf{s}_k^{(n)} \to -1 \cdot \mathbf{s}_k^{(n)}$. В этом случае для n-й системы замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ в k-м отсчёте происходит по схеме:

$$
\begin{gathered}
\mathtt{T0} \leftrightarrow \mathtt{T0}, \\
\mathtt{T1} \leftrightarrow \mathtt{T2}, \mathtt{T3N} \leftrightarrow \mathtt{T5P}, \mathtt{T3P} \leftrightarrow \mathtt{T5N}, \mathtt{T4N} \leftrightarrow \mathtt{T4P},. \\
\mathtt{T6S} \leftrightarrow \mathtt{T7S}, \mathtt{T6} \leftrightarrow \mathtt{T7}, \mathtt{T6L} \leftrightarrow \mathtt{T7L}, \mathtt{T8N} \leftrightarrow \mathtt{T8P}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Каждый вариант инвертирования обозначим номером m. Общее количество вариантов инвертирования есть $M = 2^{N-1}$.

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [12]. Для её обнаружения, необходимо подвигать относительно друг друга фазовые траектории систем. Для этого введём оператор сдвига (в строгом смысле действительный при $K \to \infty$):

$$
\mathrm{H}_{\mathbf{h}} : \left\{ T_k^{\alpha\varphi}|_1 \to T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \ldots, T_k^{\alpha\varphi}|_n \to T_{k+h_n}^{\alpha\varphi}|_n, \ldots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \to T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N \right\},\ h_n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ h_n << K. \tag{6}
$$

Так как противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, то при расчёте частного интегрального коэффициента синхронности учтём это обстоятельство:

$$\delta^s_{m,\mathbf{h}} = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J_k \,|\, \{m, \mathbf{h}\},\ k^* = 1 + \max\left(h_1, \ldots, h_N\right),\ K^* = K + \min\left(h_1, \ldots, h_N\right), \tag{7}$$

где K – длина последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\,|_n\}_{k=1}^K$.

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^s = \max_m \max_{\mathbf{h}} \delta^s_{m,\mathbf{h}},\ 0 \leqslant \delta^s \leqslant 1, \tag{8}$$

т. е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые, в совокупности, доставляют максимальное количество отсчётов k, отвечающих условию $J_k = 1$.

Из определения условия синхронизации (4) следует, что предложенный анализатор синхронности оценивает уровень полной синхронизации [10], обнаруживает противофазную синхронизацию [11] с лаг-синхронизацией [12] именно в алфавитном представлении $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}$. Но из определения геометрии символов Т-алфавита (2) полная синхронизация на уровне отсчётов $T_k^{\alpha\varphi}$ является более широким явлением, нежели полная синхронизация на уровне $\mathbf{s}_k$ – отсчётов самой последовательности. Ибо Т-синхронность динамических систем (по набору фазовых переменных $\mathbf{s}$) рассматривается с позиций формы (структуры геометрии) траекторий систем в расширенном фазовом пространстве. Под формой (структурой геометрии) траектории динамической системы в расширенном фазовом пространстве понимается некий её инвариант, сохраняющийся при однородных сдвигах и растяжениях траектории в пространстве фазовых переменных. Таким образом, в определённом смысле, Т-синхронизация изучает топологические аспекты синхронизации динамических систем [19, 25, 26]. Следовательно, это открывает потенциальную возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщённой синхронизации хаоса [9, 32]. Отметим, что изучение этих вопросов – предмет наших дальнейших исследований.

Введённая через (8) величина δ^s характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени $t_K - t_1$. Как указано во введении к статье, подавляющее большинство исследований по синхронизации хаоса этим обычно и ограничиваются. Но зачастую исследователя может интересовать и временная структура синхронизации систем. Напомним, что под этой структурой понимаются всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16, 17, 18].

В работе автора [29] было введено понятие *синхронного домена* SD – совокупности отсчётов временного ряда для которых справедливо условие ($\vee$ – символ логического ИЛИ):

$$\begin{gathered} \mathrm{SD}_r : \left\{J_{k'} = 1,\ J_{k''} = 0 \vee k'' = 0,\ J_{k'''} = 0 \vee k''' = K + 1\right\}, \\ k' = \overline{b_r^{\mathrm{SD}}, b_r^{\mathrm{SD}} + L_r},\ k'' = b_r^{\mathrm{SD}} - 1,\ k''' = b_r^{\mathrm{SD}} + L_r^{\mathrm{SD}} + 1, \end{gathered} \tag{9}$$

где: b_r^{SD} – момент появления, L_r^{SD} – длина и r – порядковый номер синхронного домена. Причём справедливы условия: $L_r^{\mathrm{SD}} \leqslant K$, и общее количество синхронных доменов (в исходной последовательности) $R^{\mathrm{SD}} \leqslant (K+1)\,\mathrm{div}\,2$.

Для возможности количественного описания временной структуры синхронизации систем, автором в работе [29] была введена функция спектральной плотности синхронных доменов SD

$$H^{\mathrm{SD}}[L]=\sum_{r=1}^{R^{\mathrm{SD}}}\delta[L_r^{\mathrm{SD}},L], \tag{10}$$

где $\delta[\cdot,\cdot]$ – символ Кронекера, $L=\overline{1,K}$. С целью анализа степени вырожденности структуры синхронных доменов, дополнительно была определена величина E^{SD} – энтропия структуры синхронных доменов (по Шеннону), имеющая смысл при $\delta^s>0$ [30]:

$$E^{\mathrm{SD}}=-\sum_{i=1}^{K}P^{\mathrm{SD}}[i]\ln P^{\mathrm{SD}}[i],\; P^{\mathrm{SD}}[L]=\frac{H^{\mathrm{SD}}[L]}{\sum_{i=1}^{K}H^{\mathrm{SD}}[i]}. \tag{11}$$

Из свойств энтропии Шеннона следует, что энтропия E^{SD} минимальна ($E^{\mathrm{SD}}=0$) – когда спектр $H^{\mathrm{SD}}[L]$ – вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ($E^{\mathrm{SD}}=\hat{E}^{\mathrm{SD}}$) – в случае равномерного гребёнчатого спектра $H^{\mathrm{SD}}[L]$ с предельным числом различных длин доменов синхронизации равном $\hat{W}_{cmb}^{\mathrm{SD}}$:

$$\hat{W}_{cmb}^{\mathrm{SD}}=\min\left\{\left\lfloor\frac{\sqrt{1+8\,\delta^s K}-1}{2}\right\rfloor, K-\delta^s K+1\right\},\; \hat{E}^{\mathrm{SD}}=\ln\hat{W}_{cmb}^{\mathrm{SD}}, \tag{12}$$

где $\lfloor a\rfloor$ – целая часть a. На основе (11) и (12) возможно определить относительную энтропию структуры синхронных доменов $\Delta_E^{\mathrm{SD}}\in[0,1]$:

$$\Delta_E^{\mathrm{SD}}=\frac{E^{\mathrm{SD}}}{\hat{E}^{\mathrm{SD}}}. \tag{13}$$

Величину Δ_E^{SD} имеет смысл применять, если перед исследователем стоит задача сравнить случаи синхронизации различающиеся величинами δ^s и/или K.

С целью получения полного и замкнутого представления о временной структуре синхронизма динамических систем в работе [18] было дополнительно введено понятие *десинхронного домена* $\overline{\mathrm{SD}}$ (аналог (9), но с условием $J_k=0$).

Необходимо отметить, что представленный в настоящей работе инструментарий для диагностики T-синхронизации разработан под дискретные динамические системы. Но, как будет показано далее, он может быть успешно применён и к потоковым системам. Несмотря на то, что сечение Пуанкаре, применённое к потокам, приводит к потере полной информации об их состоянии [19, 26], тем не менее, анализ T-синхронизации устойчиво обнаруживает присутствие синхронизма.

3. Анализ T-синхронизации двух взаимосвязанных неидентичных осцилляторов Рёсслера

Рассмотрение вопроса, о возможности диагностики фазовой синхронизации посредством символического CTQ-анализа, проведём на примере двух взаимно связанных неидентичных осцилляторов Рёсслера [33], находящихся в режиме винтового хаоса [26]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2}&=-\omega_{1,2}\,y_{1,2}-z_{1,2}+\varepsilon(x_{2,1}-x_{1,2}),\\ \dot{y}_{1,2}&=\omega_{1,2}\,x_{1,2}+a\,y_{1,2}+\varepsilon(y_{2,1}-y_{1,2}),\\ \dot{z}_{1,2}&=p+z_{1,2}(x_{1,2}-c),\end{aligned} \tag{14}$$

где ε – параметр связи, $\omega_1=0.98$, $\omega_2=1.03$, $a=0.22$, $p=0.1$, $c=8.5$. Параметры системы (14) были выбраны исходя из методической необходимости сопоставления результатов настоящей статьи с выводами работ [15, 34]. Параметр связи ε варьировался на интервале $[0, 0.25]$ с дискретой 1×10^{-3}. Численное интегрирование уравнений (14) проводилось методом Рунге-Кутта 5-го порядка на интервале $T=[0,8000]$, с фиксированным шагом $\Delta t=1\times10^{-2}$. Для каждого значения ε рассчитывалось 1×10^{3} траекторий с начальными условиями (НУ) независимыми для каждого из осцилляторов: $x_0=\xi_1\in[-10,10]$, $y_0=\xi_2\in[-10,10]$, $z_0=\xi_3\in[0,50]$; где ξ_{1-3} – некоррелированные равномерно распределённые случайные величины. Это позволило свести к минимуму эффект памяти на траекториях, индуцированный НУ. Из фазовых переменных системы (14), посредством стробоскопического преобразования Пуанкаре, была сформирована многомерная последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ с элементами:

$$\mathbf{s}_k=\begin{bmatrix} x_k^{(1)} & y_k^{(1)} & z_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} & y_k^{(2)} & z_k^{(2)} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Затем из последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$, по формулам (1) и (2) был сформирован набор символьных последовательностей $\{T_k^{\alpha\varphi}|_{i\,j}\}_{k=1}^{K}$, где i – номер осциллятора, а j – номер фазовой переменной. Символьные последовательности имели длину $K=1\times10^{5}$ и порождались на интервале $T'=[7,8]\times10^{3}$. Подобный сдвиг от $t=0$ объясняется необходимостью нейтрализации паразитного влияния переходного процесса.

В подавляющем большинстве работ изучение синхронизации двух многомерных систем проводится по одной паре фазовых переменных. Уравнения (14), в статьях [15, 34], также изучали только по связи $x_1\leftrightarrow x_2$. Подобный подход, в основном, объясняется ограниченностью применяемых методов исследования синхронизации, которые могут проводить только парное сравнение величин. Рассматриваемый в настоящей работе метод свободен от этого ограничения, поэтому изучать синхронизацию в осцилляторах (14) будем согласованно по всем трём фазовым переменным $(x_1\leftrightarrow x_2, y_1\leftrightarrow y_2, z_1\leftrightarrow z_2)$. Для этого общее правило синхронизации (4) переопределим в виде:

$$J_{sym}^{\alpha\varphi}\left[T_k^{\alpha\varphi}\right]=\prod_{j=1}^{3}\begin{cases}1 & T_k^{\alpha\varphi}|_{1\,j}=T_k^{\alpha\varphi}|_{2\,j}, \\ 0 & otherwise.\end{cases} \qquad (16)$$

Выражение (16) наглядно демонстрирует, как осуществляется переход от анализа одномерных систем (4) к исследованию многомерных. По аналогии с правилом (16) возможно конструировать иные схемы анализа синхронизма, в том числе для систем в виде многомерных решёток с произвольной топологией.

Синхронизация в системе (14) подробно изучалась в работах [15, 34], причём в работе [34] с позиций фазовой синхронизации, а в работе [15] – с позиций синхронизации временных масштабов. Из данных работы [15] следует, что при $\varepsilon_\tau\simeq0.039$ начинает наблюдаться фазовая синхронизация, а также синхронизация некоторых временных масштабов. В работе [34] с помощью косвенных измерений установлено, что при $\varepsilon_p\simeq0.05$ наличествует стабильная фазовая синхронизация, а при $\varepsilon_l\simeq0.15$ между осцилляторами формируется режим lag-синхронизации. Режим синхронизации с запаздыванием также подтверждается в работе [15], но при $\varepsilon>0.2$. Дополнительно делается вывод, что практически все временные масштабы синхронизованы. Необходимо отметить, что в статье [15] фазовая синхронизация рассматривается как частный случай синхронизации временных масштабов.

Далее проведём анализ системы (14) с позиций Т-синхронизации. Из рисунка 2a видно, что в целом, с ростом параметра связи, растёт и интегральный уровень синхронизации. В точке $\varepsilon_b\simeq0.017$ начинается заметный рост величины δ^s, а при $\varepsilon_s\simeq0.026$ нижний квантиль $\breve{\delta}^s$ впервые превышает верхний квантиль $\hat{\delta}_0^s$ при $\varepsilon=0$. Таким образом, в первом приближении, точку ε_s возможно считать статистически значимым порогом возникновения T-синхронизации в системе (14). Отметим, что построение критических интервалов производилось по эмпирическим функциям распределений рассчитываемых характеристик. Верхний и нижний квантили строились как двусторонние порядков $1-\alpha/2$ и $\alpha/2$, соответственно. Уровень статистической значимости принят $\alpha = 10^{-3}$. При этом в качестве оценки средней величины исследуемых характеристик в работе используется медиана, как более робастный индикатор, нежели арифметическое среднее [35].

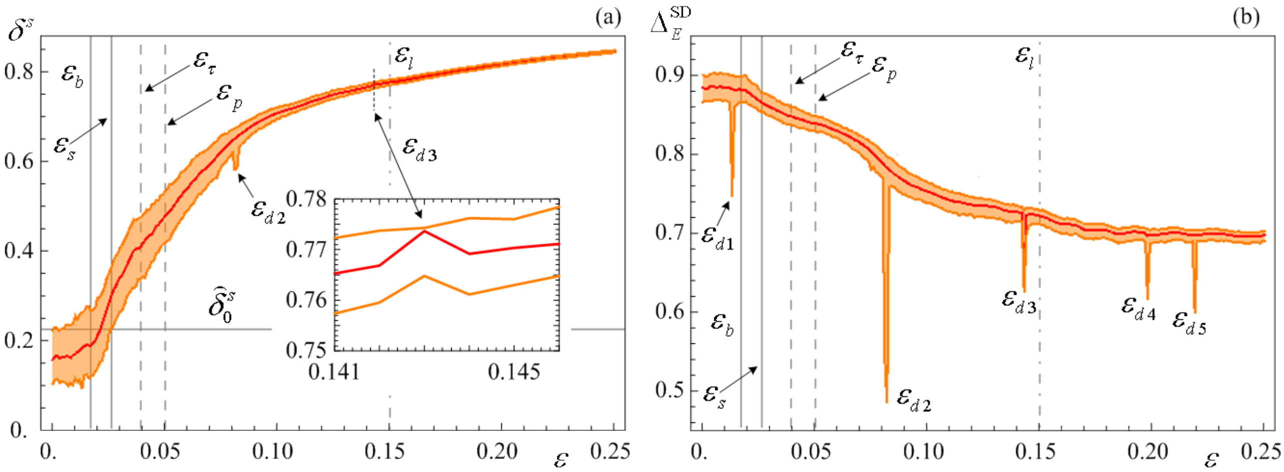

Рис. 2. Зависимость от параметра ε: (a) – δ^s и (b) – Δ_E^{SD}; лаг-синхронность не учитывается $\mathbf{h} = \mathbf{0}$; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, оранжевый – интервал значений с границами по вероятности $1-\alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

В свою очередь, анализ рисунка 2b показывает, что при $\varepsilon = \varepsilon_b$ начинается резкий спад относительной энтропии структуры синхронных доменов. При этом ширина коридора значений Δ_E^{SD} по вероятности $1-\alpha$ меняется достаточно монотонным образом. Эта монотонность нарушается в пяти областях – происходит резкое и весьма существенное уменьшение значений нижнего квантиля (см. рисунок 2b): $\varepsilon_{d1} \simeq 0.013$, $\varepsilon_{d2} \simeq 0.082$, $\varepsilon_{d3} \simeq 0.143$, $\varepsilon_{d4} \simeq 0.198$ и $\varepsilon_{d5} \simeq 0.219$. При этом в точке ε_{d3} резко уменьшается и медиана величины Δ_E^{SD}. А области ε_{d2} и ε_{d3} отчётливо фиксируются и по параметру δ^s (см. рисунок 2a). Таким образом, принимая во внимание смысл относительной энтропии структуры синхронных доменов, возможно сделать предварительный вывод о негрубости режима синхронизации в указанных пяти зонах. Это может косвенно указывать на наличие в них бифуркационных смен режимов [19, 26] и/или характера синхронизации.

Медиана спектральной плотности синхронных доменов приведена на рисунке 3a. Максимальная зарегистрированная длина синхронного домена составила $\max L^{\mathrm{SD}} = 306$ отсчётов, при этом наиболее часто встречающиеся синхронные домены имеют длину не более 150 отсчётов. С увеличением параметра связи ε наиболее вероятные домены – также увеличивают свою длину, повышая интегральный уровень синхронности δ^s. Необходимо отметить, что область ε_{d3} отчётливо фиксируется и на карте спектральной плотности (см. рисунок 3a).

Детальный анализ спектральной плотности синхронных доменов в областях ε_{d1-5} показал, что зависимость $H^{\mathrm{SD}}[L^{\mathrm{SD}}]$ становится более изрезанной – спектры приобретают ярко выраженный гребёнчатый характер. Этот феномен проиллюстрирован на рисунке 4, где приведены спектры плотности синхронных доменов в зонах ε_{d2-4} и для сравнения – спектры для значений параметра связи, отстоящих от ε_{d2-4} на малую величину 2×10^{-3}. Таким образом, сделанный выше вывод о негрубости режима синхронизации в указанных пяти зонах и наличие в них бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации – подтверждается.

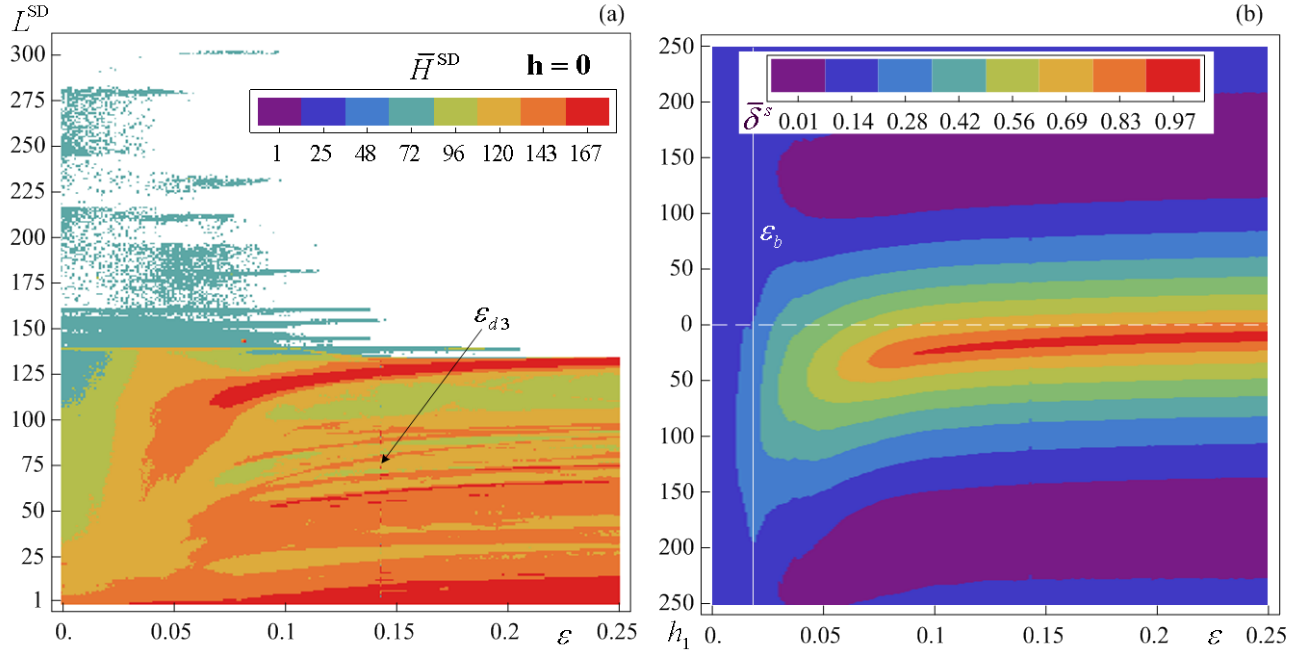

Рис. 3. Зависимость от параметра ε : (a) – $\bar{H}^{\mathrm{SD}}\left(L^{\mathrm{SD}}\right)$ и (b) – $\bar{\delta}^s(\mathbf{h})$.

Зависимость медианы интегрального уровня синхронизации $\bar{\delta}^s$ от параметра связи ε и вектора сдвигов между траекториями систем $\mathbf{h}$ приведена на рисунке 3b. Из рисунка видно, что в системе реализуется режим лаг-синхронизации. При этом с возрастанием параметра связи – величина запаздывания между системами – снижается.

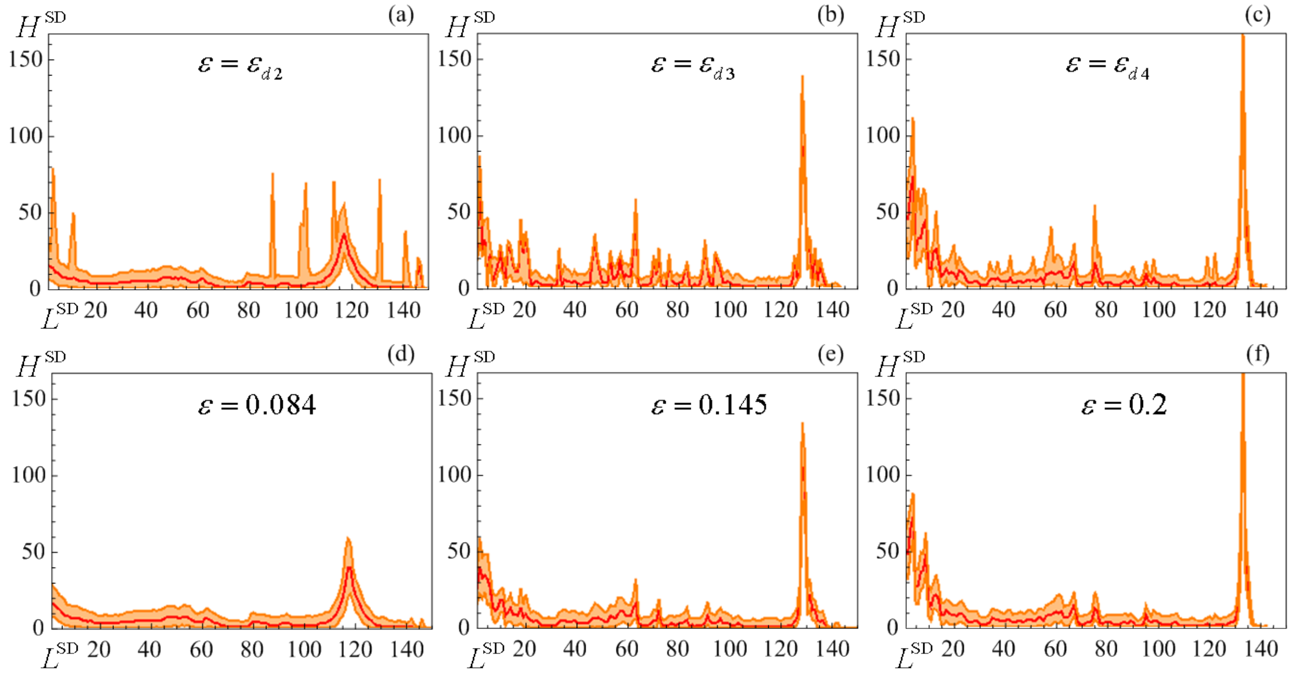

Рис. 4. Зависимость $H^{\mathrm{SD}}[L^{\mathrm{SD}}]$ для фиксированных значений параметра ε ; лаг-синхронность не учитывается $\mathbf{h}=\mathbf{0}$; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, оранжевый – интервал значений с границами по вероятности $1-\alpha$ с уровнем значимости $\alpha=10^{-3}$.

Изучение $\mathbf{h}_{eff}$ – эффективных значений параметров сдвига позволило уточнить характер лаг-синхронизации. Под величиной $\mathbf{h}_{eff}$ понимается множество значений параметров сдвига, удовлетворяющих условию:

$$\mathbf{h}_{eff} = \left\{\mathbf{h} : \widehat{\delta}^{s}(\mathbf{h}) > \max \breve{\delta}^{s}\right\}. \tag{17}$$

Границы множества эффективных значений параметров сдвига приведены на рисунке 5a, а график изменения w_h – ширины области $\mathbf{h}_{eff}$, в зависимости от параметра ε, приведён на рисунке 5b.

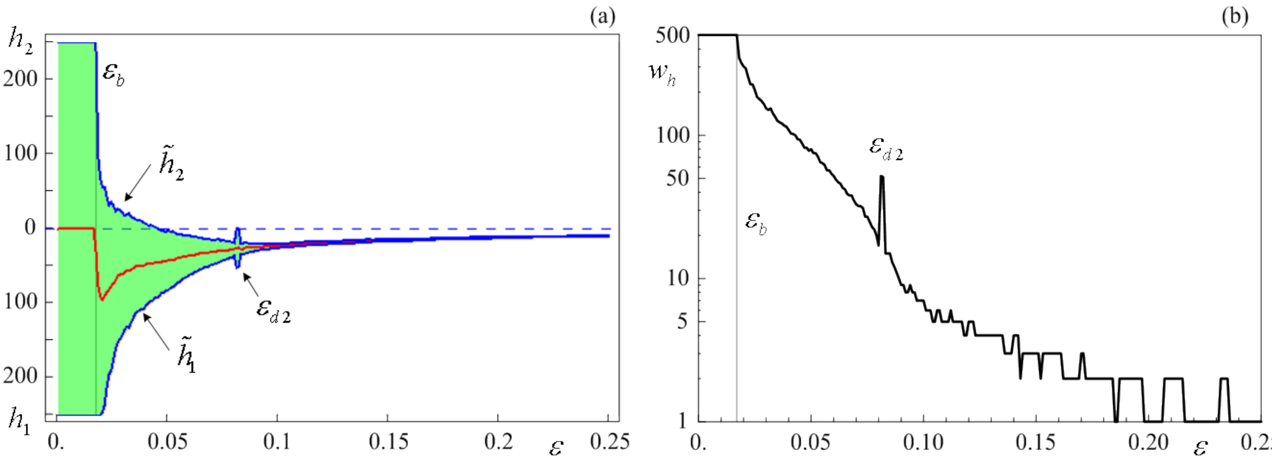

Рис. 5. Зависимость от параметра ε: (a) – $\mathbf{h}_{eff}$ и (b) – w_h; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, зелёный – область $\mathbf{h}_{eff}$, синий – границы области $\mathbf{h}_{eff}$.

Из рисунков 5a и 5b следует, что вплоть до момента $\varepsilon = \varepsilon_b$ ширина множества эффективных значений параметров сдвига равна максимальной величине, принятой в данной работе. В зоне $\varepsilon > \varepsilon_b$ ширина w_h достаточно монотонно уменьшается, исключением является область ε_{d2}. Таким образом, на основе анализа поведения величины w_h, порог обнаружения T-синхронизации возможно обоснованно сдвинуть влево с точки ε_s к точке ε_b.

Зависимости интегрального уровня синхронизации и относительной энтропии структуры синхронных доменов от параметра связи, с учётом лаг-синхронизации, приведены на рисунках 6a и 6b, соответственно. Лаг-синхронизация учитывается по медиане множества $\mathbf{h}_{eff}$.

Из рисунка 6a видно, что интегральный коэффициент синхронизации после ε_b растёт быстрее, нежели в случае, когда лаг-синхронизация не учитывается (см. рисунок 2a). При этом зона ε_{d2} выражена более явственно, и за ней рост величины δ^s резко замедляется. Отметим также различие поведения медианы интегрального уровня синхронизации $\overline{\delta}^s$ в области ε_{d2} в случае учёта лаг-синхронизации (рисунок 6a) и без учёта последней. В первом случае, медиана прижата к нижнему квантилю, во втором – к верхнему. Из сравнения рисунков 2a и 6a следует, что учёт запаздывания между системами позволяет увеличить оценку наблюдаемого интегрального уровня синхронизации. Так при $\varepsilon = 0.25$, $\delta^s(\mathbf{h} = \mathbf{0}) \approx 0.8437$, а $\delta^s(\mathbf{h} = \overline{\mathbf{h}}_{eff}) \approx 0.9655$.

Сравнение рисунков 2b и 6b демонстрирует различное поведение относительной энтропии между зонами ε_{d2} и ε_{d5} и справа от неё в случае лаг-синхронизации и без учёта последней. Как видно из рисунка 6b в случае учёта запаздывания между системами, на означенном интервале значений ε появляются явно выраженные локальные всплески энтропии, которые проявляются на уровне обоих квантилей. Причины этого явления пока остаются не ясными.

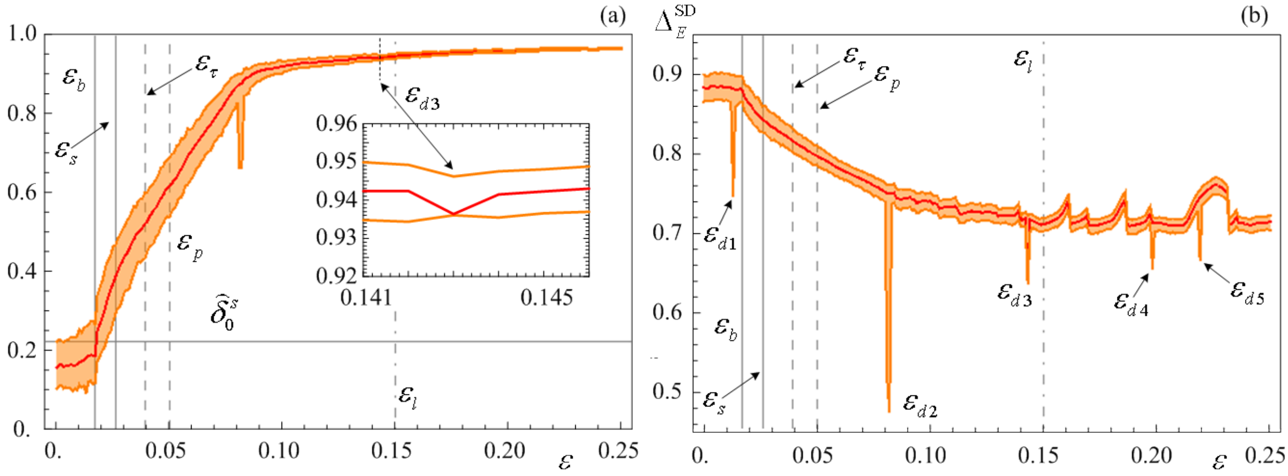

Рис. 6. Зависимость от параметра ε : (a) – δ^s и (b) – Δ_E^{SD} ; лаг-синхронизация учитывается по медиане множества эффективных значений параметров сдвига; цвета на графиках означают: красный – оценка медианы, оранжевый – интервал значений с границами по вероятности $1-\alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

Необходимо также отметить, что в зоне синхронизма как без учёта лаг-синхронизации, так и с её учётом, везде реализуется режим прямой синхронизации, т.е. инвертирование (5) фазовых переменных отсутствует.

Таким образом, агрегируя полученные результаты и сравнивая их с результатами работ [15, 34] возможно сформулировать ряд основных выводов.

Во-первых, Т-синхронизация начинает устойчиво диагностироваться ранее, нежели обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации и/или синхронизации временных масштабов. Действительно, устойчивый порог обнаружения Т-синхронизации $\varepsilon_b \simeq 0.017$, в то время как порог для синхронизации временных масштабов $\varepsilon_\tau \simeq 0.039$, а для фазовой синхронизации $\varepsilon_p \simeq 0.05$. Более того, в работе [15] указано, что при $\varepsilon \simeq 0.025$ – синхронизация отсутствует.

Во-вторых, анализ временной структуры синхронизма [18] весьма чувствительный инструмент, позволяющий обнаруживать негрубость режима синхронизации и наличие бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации. Так области ε_{d1} и ε_{d3} являются предвестниками вхождения исследуемой системы (14) в режим Т-синхронизации и лаг-синхронизации, соответственно. Зона ε_{d2} связана с указанными в работе [15] значениями $\varepsilon \simeq 0.08$ и $\varepsilon \simeq 0.1$, в которых фиксируется режим сильной фазовой синхронизации. Изучение содержательного смысла областей ε_{d4} и ε_{d5} – предмет наших дальнейших исследований.

4. Заключение

Итак, в настоящей работе получил дальнейшее развитие метод диагностирования синхронизации хаотических колебаний, основанный на так называемой Т-синхронизации [18, 29, 30]. Существенным отличием рассмотренного подхода от аналогов является способность разработанного инструментария количественно анализировать характеристики временной структуры синхронизации нелинейных систем [18] через перемежаемость [16, 17]. Кроме того, в отличие от подавляющего большинства существующих методов, подход на основе Т-синхронизации может быть с успехом применён для исследования многомерных систем состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решёток с произвольной топологией.

В данной работе впервые демонстрируется применение Т-синхронизации в аспекте исследования систем с фазовой синхронизацией [14] и синхронизацией временных масштабов [15]. Причём в качестве изучаемого примера намеренно выбрана система из двух неидентичных осцилляторов Рёсслера [33] с аттракторами с плохо обусловленной фазой [34]. Из совокупности полученных результатов следует, что Т-синхронизация в исследуемой системе начинает устойчиво диагностироваться ранее, нежели обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации [34] и/или синхронизации временных масштабов [15].

При этом анализ временной структуры синхронизации посредством введённых в работе характеристик (спектральная плотность и энтропия структуры синхронных доменов) оказывается весьма чувствительным инструментом, позволяющим обнаруживать негрубость режима синхронизации и наличие бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации. Кроме того, инструментарий на основе символического CTQ-анализа позволяет проводить комплексное исследование синхронизма хаотических колебаний, включая обнаружение запаздывания между системами и инверсные эффекты между их фазовыми переменными.

Следует также указать на основные недостатки предложенного подхода к диагностированию синхронизации хаотических колебаний. Метод не способен дифференцировать и определять тип бифуркационных изменений аттрактора [26] и качественный характер режима синхронизации. Отметим, что устранение данных недостатков является предметом наших дальнейших исследований.

В заключение, отметим, что рассмотренный подход, основанный на положениях символического CTQ-анализа [23, 24], может быть применён для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, инвариантность символического анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [24], позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем. Вполне возможно, это позволит эффективно применять предложенную методику для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими и техническими [1, 2, 3, 4, 5, 19], физиологическими и биологическими [20, 21], финансовыми [22, 31, 32] и другими системами.

Автор признателен рецензенту за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению качества статьи.

Список литературы

1. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., C. Zhou // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.
3. Аргонов В.Ю., Пранц С.В. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. С. 260.
4. Кузнецов С.П. // УФН. 2011. Т. 181.С. 121.
5. Напартович А.П., Сухарев А.Г. // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 1593.
6. Cuomo K.M., Oppenheim A.V. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65.
7. Larger L., Goedgebuer J.-P. // C.R. Physique. 2004. Vol. 5. P. 609.
8. Planat M. // Neuroquantology. 2004. Vol. 2. P. 292; arXiv:quant-ph/0403020.
9. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
10. Pecora L.M., Caroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
11. Liu W., Qian X., Yang J. et al. // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354. P. 119.
12. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev.Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
13. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 569.

14. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2291.
15. Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. С. 391.
16. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А. и др. // УФН. 1987. Т. 152. С. 3.
17. Mandelbrot B.B. // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 62. P. 331.
18. Макаренко А.В. // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. С. 1053.
19. Брур Х.В., Дюмортье Ф., Стрин С. ванн, Такенс Ф. Структуры в динамике, М.–Иж.: ИКИ, 2003.
20. Борисов С.В., Каплан А.Я., Горбачевская Н.Л., Козлова И.А. // Физиология человека. 2005. Т. 31. С. 1.
21. Porta A., D'Addio G., Pinna G.D., Maestri R., at al. // Symbolic analysis of 24h holter heart period variability series: comparison between normal and heart failure patients. Computers in Cardiology 2005, P. 575.
22. Tino P., Schittenkopf C., Dorffner G. // Pattern Analysis & Applications. 2001. Vol. 4. P. 283.
23. Макаренко А.В. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 1.
24. Макаренко А.В. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. С. 1248.
25. Боуэн Р. Методы символической динамики. Сб. статей. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
26. Gilmore R., Lefranc M. The topology of chaos. Wiley-Interscience, 2002.
27. Hsu C.S. Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems, Springer-Verlag, N.Y., 1987.
28. Dellnitz M., Hohmann A. // Numerische Mathematik. 1997. Vol. 75. P. 293.
29. Макаренко А.В. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 53.
30. Макаренко А.В. // Наноструктуры. Мат. физика и модел. 2013. Т 8. С. 21.
31. Makarenko A.V. // Symbolic CTQ-analysis – a new method for studying of financial indicators. International Conference “Advanced Finance and Stochastics”. Moscow, 24-28 June 2013, Steklov Mathematical Institute. P. 63.
32. Makarenko A.V. // Generalized synchronization of multidimensional chaotic systems in terms of symbolic CTQ-analysis. The 8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. Paris 26-28 May 2015, ISAST, Institute Henri Poincare, pp. 77-78.
33. Rossler O.E. // Physics Letters A. 1976. Vol. 57. P. 397.
34. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., at al. // Phys. Rev. Lett. 2002, Vol. 89. P. 264102-1.
35. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М: Наука, 1979.