

УПРАВЛЕНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

обработка сигналов

А.В. Макаренко

`avm@rdcn.ru`

Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»
Москва, Россия, www.rdcn.ru

Институт проблем управления РАН
Москва, Россия

Учебный курс – Лекция 6

26 апреля 2018 г.

ИПУ РАН, Москва, Россия

- ① Обработка сигналов
 - Общие положения
 - Анализ процессов и систем
 - Фильтрация сигналов
 - Обнаружение и классификация сигналов
- ② Заключение

Outline section

- ① Обработка сигналов
 - Общие положения
 - Анализ процессов и систем
 - Фильтрация сигналов
 - Обнаружение и классификация сигналов

- ② Заключение

Определение понятия

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in S \subset \mathbb{R}, \quad t \in T \subset \mathbb{T}.$$

Определение понятия

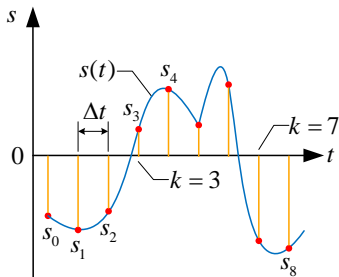
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in S \subset \mathbb{R}, \quad t \in T \subset \mathbb{T}.$$

Дискретизация во времени:

$$s'_k = s(t_k), \quad k \in K \subset \mathbb{Z}, \quad K = \overline{0, K-1}, \quad t_k < t_{k+1}.$$



Эквидистантность отсчётов:

$$t_{k'+1} - t_{k'} \equiv t_{k''+1} - t_{k''},$$

$$k' \neq k'', \quad k', k'' \in K.$$

Важный момент:

- Джиттер – фазовое дрожание отсчёта данных.

Определение понятия

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in S \subset \mathbb{R}, \quad t \in T \subset \mathbb{T}.$$

Квантование по уровням:

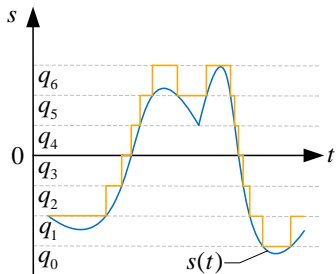
$$q(t) = \left\lfloor \frac{s(t) - s_{min}}{h} \right\rfloor, \quad s_q(t) = [q(t) + 1] h, \quad h = \frac{s_{max} - s_{min}}{2^n}$$

Динамический диапазон:

$$SQNR = 20 \lg 2^n \quad [\text{дБ}].$$

Важный момент:

- Шум квантования – ошибки, возникающие при квантовании сигнала.



Определение понятия

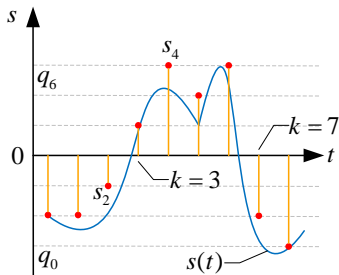
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in S \subset \mathbb{R}, \quad t \in T \subset \mathbb{T}.$$

Цифровой сигнал:

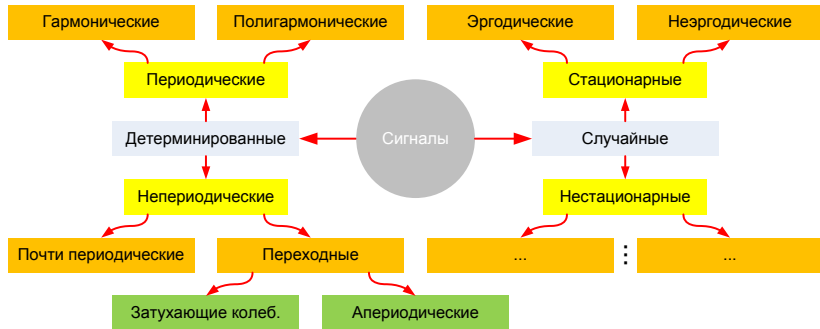
Дискретизация во времени + Квантование по уровням



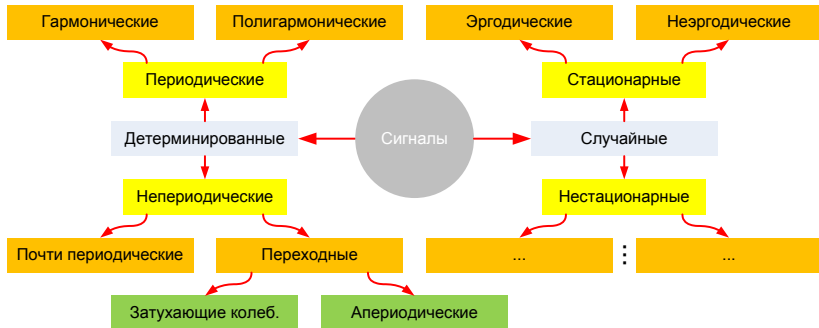
Важный момент:

- Важным свойством цифрового сигнала, определившего его доминирование в современных системах, является его способность к полной регенерации в ретрансляторе (до некоторого порогового отношения сигнал/шум).

Классы сигналов



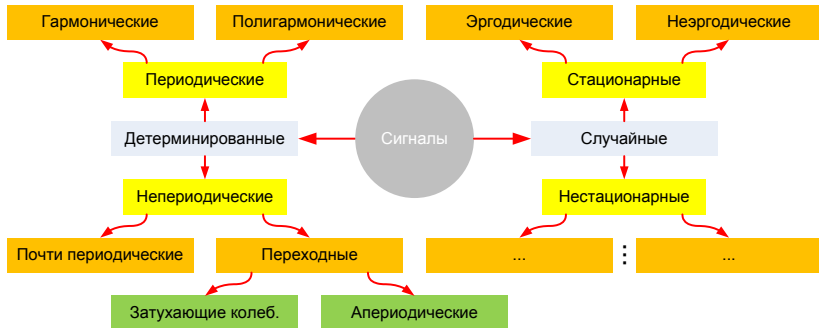
Классы сигналов



Гармонический:

$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \omega), \quad T_p = \frac{1}{f}.$$

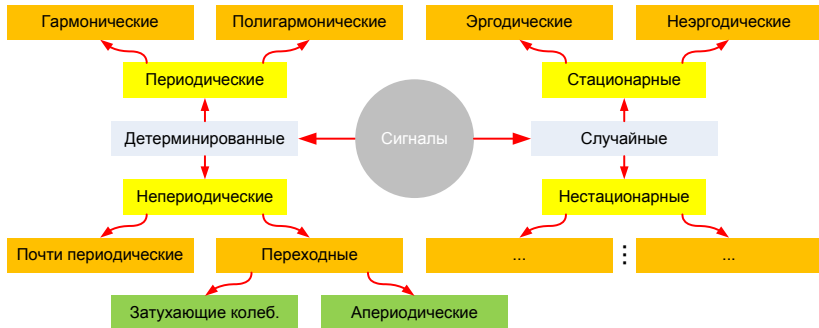
Классы сигналов



Полигармонический:

$$s(t) = s(t \pm n T_p), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad f_0 = \frac{1}{T_p}.$$

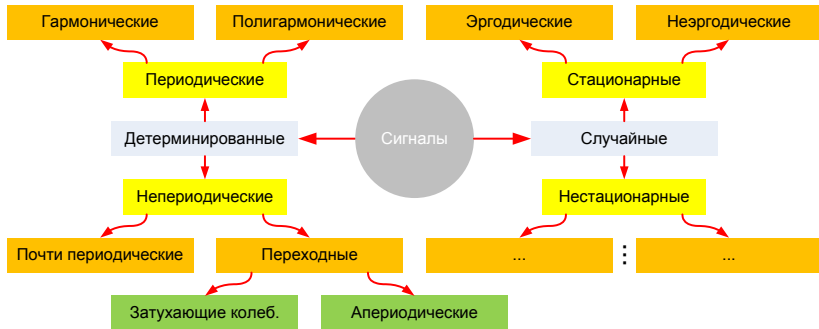
Классы сигналов



Почти периодический:

$$s(t) = \sum_{i=0}^M A_i \sin(2\pi f_i t + \omega_i), \quad \exists i', i'' : \frac{f_{i''}}{f_{i'}} \notin \mathbb{Q}.$$

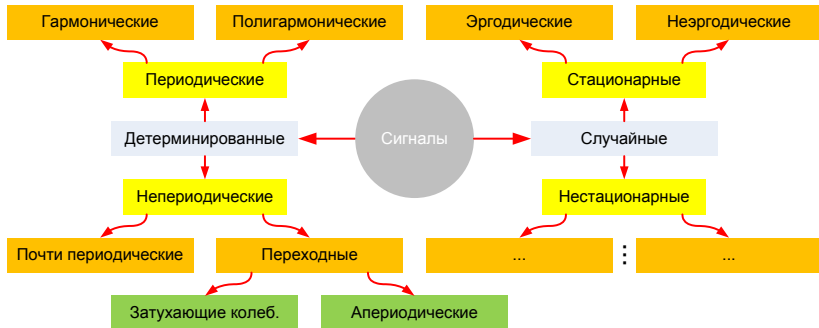
Классы сигналов



Переходной:

- Это все непериодические процессы, за исключением почти периодических:
- **Затухающие колебания** – это колебания, энергия которых уменьшается с течением времени (амплитуда колебаний A является убывающей функцией).
- **Апериодическое колебание** – это затухающие колебания, у которых $T_p \rightarrow \infty$.

Классы сигналов



Стационарный:

- В узком смысле – (строго стационарный):

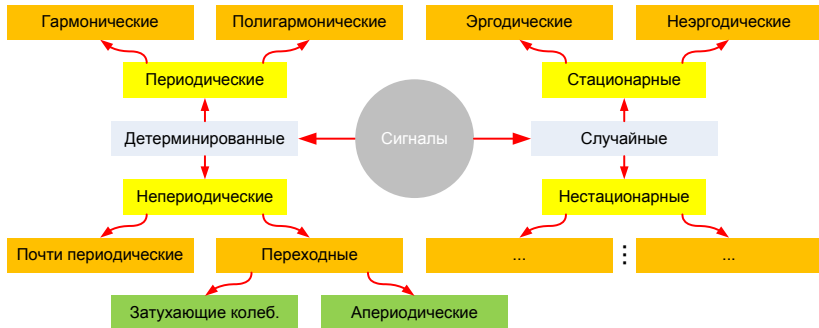
$$\{S_t\} : F_S(s_{t_1+\tau}, \dots, s_{t_k+\tau}) = F_S(s_{t_1}, \dots, s_{t_k}), \forall \tau \neq 0.$$

- В широком смысле – (слабо стационарный):

$$E[s(t)] = m_s(t) = m_s(t + \tau), \forall \tau \neq 0,$$

$$E[(s(t_1) - m_s(t_1))(s(t_2) - m_s(t_2))] = C_s(t_1, t_2) \Rightarrow C_s(\tau, 0), \tau = t_1 - t_2.$$

Классы сигналов

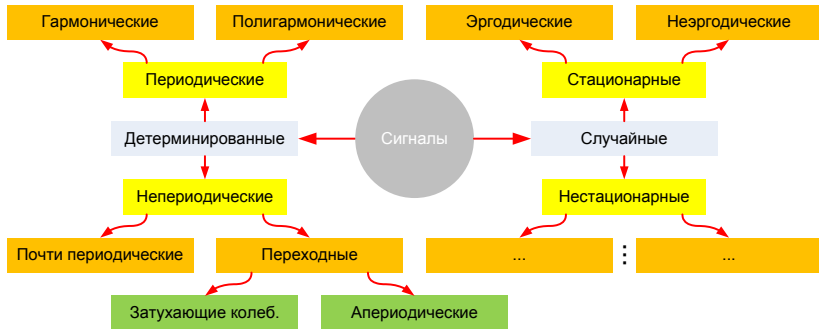


Эргодический:

- Средние значения по времени почти всех возможных реализаций процесса с вероятностью единица сходятся к одной и той же постоянной величине (среднему значению по ансамблю).

$$P \left[E \left[\{S_t\} \right]_k = E \left[\{S_t\} \right]_t \right] = 1.$$

Классы сигналов



Стационарность выборочных функций:

- Понятие применяется при наличии **единственной реализации с.п.**

$$\left| \mathbb{E}[s_k(t)]_{t_1}^{t_2} - \mathbb{E}[s_k(t)]_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} \right| < \delta, \forall \tau,$$

$$\left| C_s(t_1, t_2)_k - C_s(t_1 + \tau, t_2 + \tau)_k \right| < \delta, \forall \tau.$$

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2 \Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2 \Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова, теорема отсчётов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - k \Delta t)\right), \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}, \quad 0 < \Delta t \leq \frac{1}{2 f_{Sg}}.$$

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2 \Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Следствия из теоремы:

- любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным во времени отсчётам, взятым с частотой $f_s > f_{Sg}$, где f_{Sg} – максимальная частота в спектре реального сигнала.
- если максимальная частота в сигнале равна или превышает частоту Найквиста – половину частоты дискретизации, то способа восстановить сигнал из дискретного в аналоговый без искажений не существует, так называемая проблема наложения спектра (алиасинг).

Анализ во временной области

- моменты случайной величины.
- плотности вероятности.
- автокорреляционные функции.
- совместные плотности вероятности.
- взаимокорреляционные функции.
- импульсная характеристика системы:

$$y_k = \sum_{i=0}^k h_i x_{k-i}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

где

$$y = h \circ x,$$

это операция дискретной свёртки.

Анализ в частотной области I

Дискретное преобразование Фурье:

$$\dot{S}_l = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} s_k \exp\left[-i \frac{2\pi k l}{K}\right], \quad f_l = \frac{l}{T} = \frac{l}{K \Delta t}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$k = \overline{0, K-1}, \quad l = \overline{0, L}, \quad L = \frac{K}{2}, \quad K = 2^n.$$

Примечания:

f_L – частота Найквиста.

f_1 – определяет разрешение по частоте.

Анализ в частотной области I

Дискретное преобразование Фурье:

$$\dot{S}_l = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} s_k \exp\left[-i \frac{2\pi k l}{K}\right], \quad f_l = \frac{l}{T} = \frac{l}{K \Delta t}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$k = \overline{0, K-1}, \quad l = \overline{0, L}, \quad L = \frac{K}{2}, \quad K = 2^n.$$

Примечания:

f_L – частота Найквиста.

f_1 – определяет разрешение по частоте.

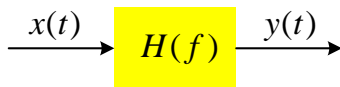
Оценка односторонней спектральной плотности:

$$\hat{G}_{ss}(f_l) = \frac{2}{n_d K \Delta t} \sum_{i=0}^{n_d-1} |\dot{S}_i(f_l)|^2.$$

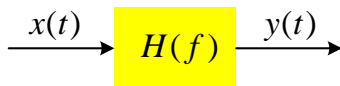
Примечание:

От числа усреднений n_d зависит случайная ошибка оценки спектра.

Анализ в частотной области II



Анализ в частотной области II



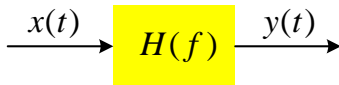
Взаимная спектральная плотность:

$$\hat{G}_{xy}(f_l) = \frac{2}{n_d K \Delta t} \sum_{i=0}^{n_d-1} |\dot{X}_i^*(f_l) \dot{Y}_i(f_l)|.$$

Примечание:

Взаимная спектральная плотность G_{xy} – величина комплексная.

Анализ в частотной области II



Взаимная спектральная плотность:

$$\hat{G}_{xy}(f_l) = \frac{2}{n_d K \Delta t} \sum_{i=0}^{n_d-1} |\dot{X}_i^*(f_l) \dot{Y}_i(f_l)|.$$

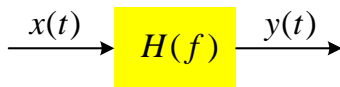
Примечание:

Взаимная спектральная плотность G_{xy} – величина комплексная.

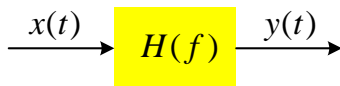
Частотная характеристика системы:

$$|\hat{H}_{xy}(f_l)| = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_l)|}{\hat{G}_{xx}(f_l)}, \quad \hat{\varphi}_{xy}(f_l) = \arctg \frac{\Im \hat{G}_{xy}(f_l)}{\Re \hat{G}_{xy}(f_l)}.$$

Анализ в частотной области III



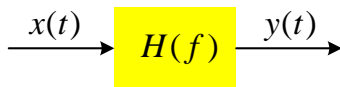
Анализ в частотной области III



Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_l) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_l)|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l) \hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Анализ в частотной области III



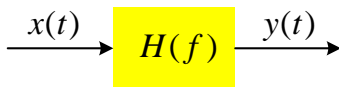
Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_l) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_l)|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l) \hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Когерентный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}_{yy}^\gamma(f_l) = \hat{\gamma}_{xy}^2(f_l) \hat{G}_{yy}(f_l).$$

Анализ в частотной области III



Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_l) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_l)|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l) \hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Когерентный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}_{yy}^\gamma(f_l) = \hat{\gamma}_{xy}^2(f_l) \hat{G}_{yy}(f_l).$$

Остаточный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}_{vv}^\gamma(f_l) = \hat{G}_{yy}(f_l) - \hat{G}_{yy}^\gamma(f_l).$$

Анализ в частотной области IV

- спектральные плотности.
- взаимные спектральные плотности.
- частотные характеристики.
- функции когерентности.
- когерентные спектры.
- остаточные спектры.

Оконное преобразование Фурье

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^K$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\dot{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k w_k \exp\left[-i \frac{2 \pi k l}{K}\right].$$

Оконное преобразование Фурье

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^K$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\dot{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k w_k \exp\left[-i \frac{2\pi k l}{K}\right].$$

Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Оконное преобразование Фурье

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^K$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\dot{s}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k w_k \exp\left[-i \frac{2 \pi k l}{K}\right].$$

Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Искажения, вносимые применением окон, определяются размером окна и его формой. Выделяют два основных свойства частотных характеристик окон: **ширина главного лепестка** и **максимальный уровень боковых лепестков**. Применение окон, отличных от прямоугольного, обусловлено желанием уменьшить влияние боковых лепестков за счёт увеличения ширины главного.

Оконное преобразование Фурье

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^K$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\dot{s}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k w_k \exp \left[-i \frac{2 \pi k l}{K} \right].$$

Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Искажения, вносимые применением окон, определяются размером окна и его формой. Выделяют два основных свойства частотных характеристик окон: **ширина главного лепестка** и **максимальный уровень боковых лепестков**. Применение окон, отличных от прямоугольного, обусловлено желанием уменьшить влияние боковых лепестков за счёт увеличения ширины главного.

При использовании оконного преобразования Фурье невозможно одновременно обеспечить хорошее разрешение по времени и по частоте. Чем уже окно, тем выше разрешение по времени и ниже разрешение по частоте.

Теоремы Парсеваля и Хинчина–Колмогорова

ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ устанавливает равенство между энергией сигнала и энергией его спектра:

$$\sum_{k=0}^{K-1} |s_k|^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L |\dot{S}_l|^2.$$

Теоремы Парсеваля и Хинчина–Колмогорова

ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ устанавливает равенство между энергией сигнала и энергией его спектра:

$$\sum_{k=0}^{K-1} |s_k|^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L |\dot{S}_l|^2.$$

ТЕОРЕМА ХИНЧИНА-КОЛМОГорова утверждает, что спектральной плотностью мощности S_{xx} стационарного в широком смысле случайного процесса s является преобразование Фурье его автокорреляционной функции r_{xx} :

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx k} \exp[-i 2 \pi k f].$$

Вейвлет-анализ временных рядов I

Материнский вейвлет:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Примечания:

a – временной масштаб.

b – сдвиг во времени.

Вейвлет-анализ временных рядов I

Материнский вейвлет:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Примечания:

a – временной масштаб.

b – сдвиг во времени.

Достаточные условия вейвлета:

- нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt \equiv 0.$$

- ограниченность L_2 нормы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

- локализация во временной и частотной областях:

$$|\psi(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^{1+\epsilon}}, \quad |S_\psi(\omega)| \leq \frac{c}{(1+|\omega|)^{1+\epsilon}}.$$

Вейвлет-анализ временных рядов II

Прямое непрерывное вейвлет преобразование:

$$W_{ss}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Примечание:

$W_{ss}(a, b)$ – масштабно-временное описание сигнала.

Вейвлет-анализ временных рядов II

Прямое непрерывное вейвлет преобразование:

$$W_{ss}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Примечание:

$W_{ss}(a, b)$ – масштабно-временное описание сигнала.

Свойства вейвлет-преобразования:

- линейность:

$$W[\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

- сдвиг и масштабирование:

$$W[s(t - b')] = W_{ss}[a, b - b'], \quad W\left[s\left(\frac{t}{a'}\right)\right] = \frac{1}{a'} W_{ss}\left[\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}\right].$$

- дифференцируемое представление:

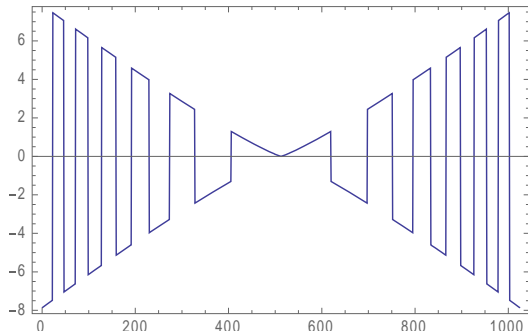
$$W\left[\frac{d^m}{dt^m} s(t)\right] = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{d^m}{dt^m} \psi_{ab}(t) dt.$$

Вейвлет-анализ временных рядов III

Пример – исходные данные:

```
data = Table [ Abs @ x ^ 1.15 Sign [ Cos [ x^2 ] ] , { x , - 6 , 6 ,  $\frac{12.}{1023}$  } ] ;
```

```
ListLinePlot [ data , Frame → True , PlotTheme → None ]
```

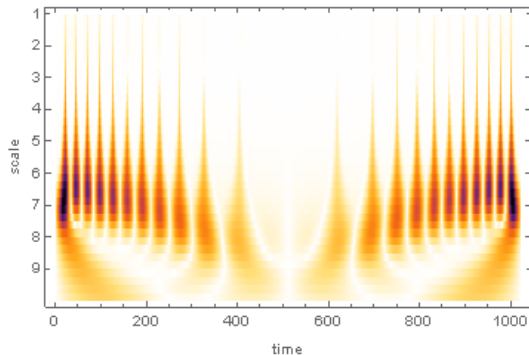


Вейвлет-анализ временных рядов III

Пример – вейвлет-преобразование:

```
cwt = ContinuousWaveletTransform [data , DGAussianWavelet [1]];
```

```
WaveletScalogram [cwt , Frame → True , FrameLabel → {"time " , "scale "},  
PlotTheme → None ]
```

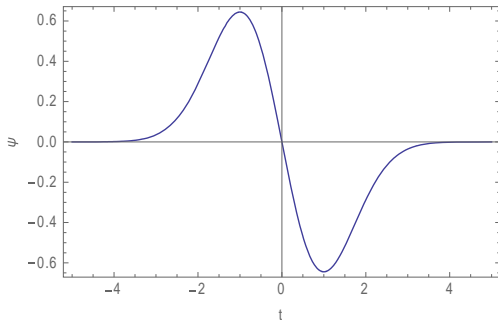


Вейвлет-анализ временных рядов IV

Материнский вейвлет во временном пространстве:

```
 $\psi[t_] := \text{WaveletPsi}[\text{DGAussianWavelet}[1], t]$ 
```

```
Plot[ $\psi[t]$ , {t, -5, 5}, PlotRange  $\rightarrow$  All, Frame  $\rightarrow$  True, PlotTheme  $\rightarrow$  None,
FrameLabel  $\rightarrow$  {"t", " $\psi$ "}]
```

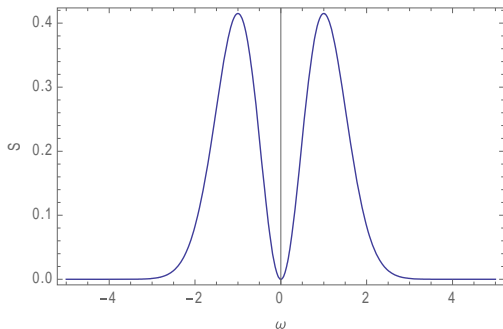


Вейвлет-анализ временных рядов IV

Материнский вейвлет в частотном пространстве:

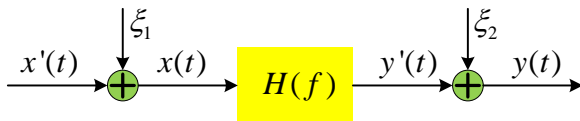
```
S[ $\omega$ _] := Evaluate @FourierTransform [ $\psi$ [t], t,  $\omega$ ]
```

```
Plot[Abs[S1[ $\omega$ ]]^2, { $\omega$ , -5, 5}, PlotRange -> All, Frame -> True,
PlotTheme -> None, FrameLabel -> {" $\omega$ ", "S"}]
```



Соотношения между входными и выходными процессами

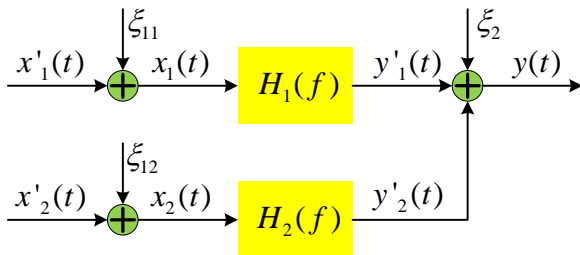
- SISO – модель с одним входом и одним выходом:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

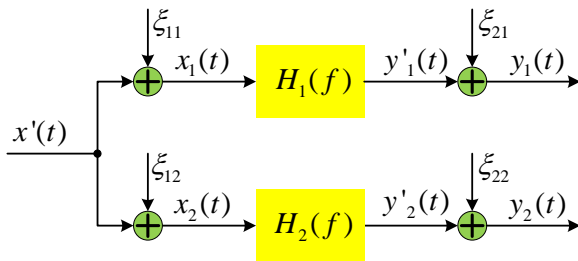
- MISO – модель с многими входами и одним выходом:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

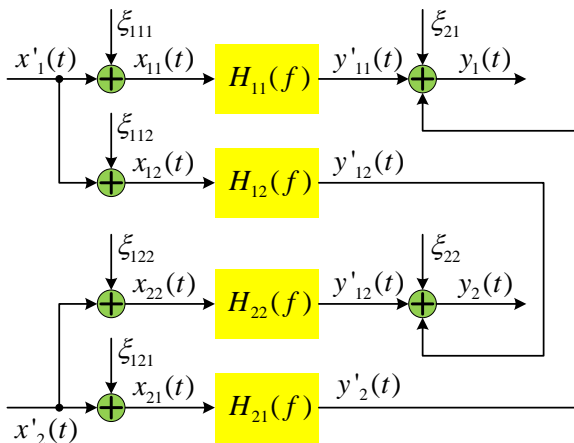
- SIMO – модель с одним входом и многими выходами:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

- ММО – модель с многими входами и многими выходами:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Цифровой фильтр

ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТР – фильтр обрабатывающий цифровой сигнал с целью выделения и/или подавления определённых частот (структурных компонент) этого сигнала.

Стационарный линейный фильтр:

$$f[x_1(t), a] + f[x_2(t), a] = f[x_1(t) + x_2(t), a], \quad a \equiv \text{const.}$$

Описание фильтров:

- h_k – импульсная характеристика.
- $H(z)$ – передаточная функция.
- $H(f_l)$ – комплексная частотная характеристика.
- $|H(f_l)|$ – амплитудно-частотная и $\varphi(f_l)$ – фазочастотная характеристики.

КИХ-фильтр

КИХ-ФИЛЬТР – (нерекурсивный фильтр, finite impulse response filter, FIR-filter) – один из видов линейных цифровых фильтров с ограниченной по времени импульсной характеристикой.

Связь между входным и выходным сигналами фильтра:

$$y_k = \sum_{i=0}^P b_i x_{k-i}.$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \sum_{i=0}^P b_i z^{-i}.$$

Положительные свойства:

- Устойчивость.
- при реализации не требуют наличия обратной связи.
- Фаза может быть сделана линейной.

Прямая связь со свёрточными нейросетями.

БИХ-фильтр

БИХ-ФИЛЬТР – (рекурсивный фильтр, infinite impulse response filter, IIR-filter) – один из видов линейных фильтров использующий один или более своих выходов в качестве входа, то есть образующий обратную связь и формирующий бесконечную по времени импульсную характеристику.

Связь между входным и выходным сигналами фильтра:

$$y_k = \sum_{i=0}^P b_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^Q a_j y_{k-j}.$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^Q a_j z^{-j}}.$$

Положительные свойства:

- широкие возможности по обработке сигналов.
- компактность при реализации.
- возможность расчёта в замкнутой форме.

Прямая связь с рекуррентными нейросетями.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

На рубеже XXI века меняется парадигма: начинают активно применяться методы машинного обучения. Многие задачи начинают решаться в нелинейной постановке.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

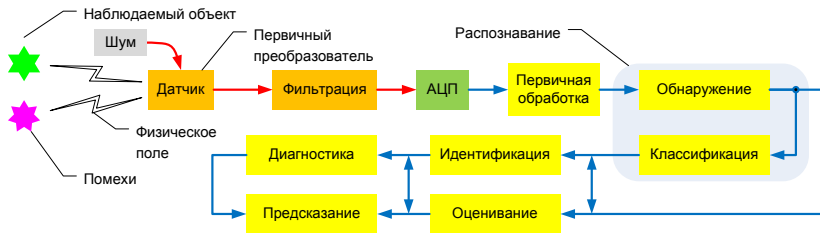
В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

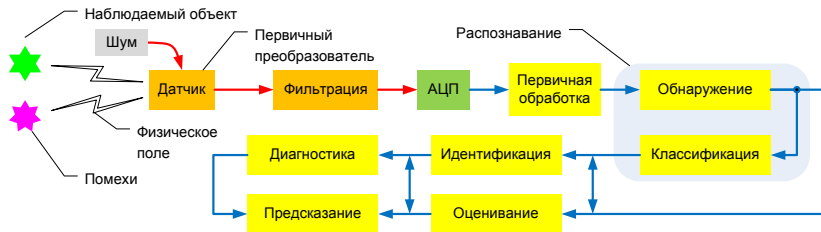
На рубеже XXI века меняется парадигма: начинают активно применяться методы машинного обучения. Многие задачи начинают решаться в нелинейной постановке.

Следующий рубеж: Deep Learning.

Решаемые задачи



Решаемые задачи



Важные моменты:

- Поскольку помехи, а зачастую и полезный сигнал, носят статистический характер, теория обнаружения построена на методах теории вероятностей и математической статистики.
- Априорная информированность является ключевым фактором, определяющим эффективность решения задачи: от «найди то, не знаю что» до «мне всё известно, вы мне не нужны».

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m -й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1, M}$.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m -й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1, M}$.

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_m(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси m -го сигнала и помехи, соответственно.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m -й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1, M}$.

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_m(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси m -го сигнала и помехи, соответственно.

Нерандомизированная решающая функция:

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in X_m, \\ 0 & \mathbf{x} \in X_0. \end{cases}, \quad X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_m.$$

Рандомизированная решающая функция принимает любые значения из отрезка $[0, 1]$, и при её значении, равном γ_m , гипотеза H_m принимается с вероятностью γ_m .

Формальное представление задач II

Вероятность ложной тревоги:

$$\alpha(\theta, \mu) = \int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{X}_1} \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x}.$$

Формальное представление задач II

Вероятность ложной тревоги:

$$\alpha(\theta, \mu) = \int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{X}_1} \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x}.$$

Вероятность пропуска объекта:

$$\delta(\theta, \mu) = 1 - \beta(\theta, \mu) = 1 - \int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_1(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{X}_0} \omega_1(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x}.$$

Вероятность правильного обнаружения $\beta(\theta, \mu)$ иначе называют ещё мощностью алгоритма обнаружения $\phi(\mathbf{x})$.

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_1(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке \mathbf{x} , причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_1(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке \mathbf{x} , причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0 \Pi_{00} \int_{X_0} \omega_0 \, d\mathbf{x} + p_0 \Pi_{01} \int_{X_1} \omega_0 \, d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{10} \int_{X_0} \omega_1 \, d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{11} \int_{X_1} \omega_1 \, d\mathbf{x}.$$

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_1(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке \mathbf{x} , причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0 \Pi_{00} \int_{X_0} \omega_0 d\mathbf{x} + p_0 \Pi_{01} \int_{X_1} \omega_0 d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{10} \int_{X_0} \omega_1 d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{11} \int_{X_1} \omega_1 d\mathbf{x}.$$

Отношение правдоподобия:

$$R \rightarrow \min : \quad L(\mathbf{x}) \equiv \frac{\omega_1(x | \{\theta, \mu\})}{\omega_0(x | \{\theta, \mu\})} \geq C = \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) p_1}.$$

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0(x | \{\theta, \mu\})$, $\omega_1(x | \{\theta, \mu\})$ – n -точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке \mathbf{x} , причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0 \Pi_{00} \int_{X_0} \omega_0 d\mathbf{x} + p_0 \Pi_{01} \int_{X_1} \omega_0 d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{10} \int_{X_0} \omega_1 d\mathbf{x} + p_1 \Pi_{11} \int_{X_1} \omega_1 d\mathbf{x}.$$

Отношение правдоподобия:

$$R \rightarrow \min : \quad L(\mathbf{x}) \equiv \frac{\omega_1(x | \{\theta, \mu\})}{\omega_0(x | \{\theta, \mu\})} \geq C = \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) p_1}.$$

Оптимальный обнаружитель:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & L(\mathbf{x}) \geq C, \\ 0 & L(\mathbf{x}) < C. \end{cases}$$

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta, \mu) = \int_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_1(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})} .$$

$$\alpha(\theta, \mu) = \int_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} \leq \alpha .$$

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta, \mu) = \int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_1(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})} .$$

$$\alpha(\theta, \mu) = \int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} \leq \alpha .$$

Поиск оптимума ведётся по всем возможным алгоритмам обнаружения. Если решение удастся найти, то оно является равномерно наиболее мощным (РНМ).

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta, \mu) = \int_X \phi(\mathbf{x}) \omega_1(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})}$$

$$\alpha(\theta, \mu) = \int_X \phi(\mathbf{x}) \omega_0(x | \{\theta, \mu\}) d\mathbf{x} \leq \alpha.$$

Поиск оптимума ведётся по всем возможным алгоритмам обнаружения. Если решение удастся найти, то оно является равномерно наиболее мощным (РНМ).

Дополнительные условия:

- несмещённости, $\beta(\theta, \mu) \leq \alpha$.
- инвариантности, $\phi(g \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$, $g \in G$ – группа преобразований выборочного пространства X .
- выполнимости фундаментальной леммы Неймана-Пирсона (см. **Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.**) – сужение допустимых классов ω_0 и ω_1 .

Outline section

- 1 Обработка сигналов
 - Общие положения
 - Анализ процессов и систем
 - Фильтрация сигналов
 - Обнаружение и классификация сигналов
- 2 Заключение

Контрольная работа

Задание для слушателей:

- 1 Изучить теоретические основы задач оценивания и прогнозирования сигналов в вероятностной постановке с позиций математической статистики.
- 2 Изучить особенности вычисления дискретных свёрток в частотном пространстве (линейные, периодические, аperiodические свёртки).
- 3 Изучить построение спектральных оценок $\hat{G}_{ss}(f_l)$ в привязке к функционалу библиотеки `scipy`.
- 4 Решить задачу:

Квалификационная задача

Необходимо разработать, обучить и представить предобученную глубокую нейронную сеть принимающую на вход произвольный сигнал, заданный в виде дискретной последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{1024}$, $s \in \mathbb{R}$, $t_{k+1} - t_k = \tau$, и выдающую на выходе оценку power spectral density (dB) в виде дискретной последовательности $\{g_k\}_{k=0}^{512}$. Обучающее и тестовое множества генерируются самостоятельно (каждая последовательность должна иметь нулевое среднее и единичную дисперсию). Решение реализуется на фреймворке Keras (Python 3.x, CNTK) и проверяется на валидационном наборе лектора.